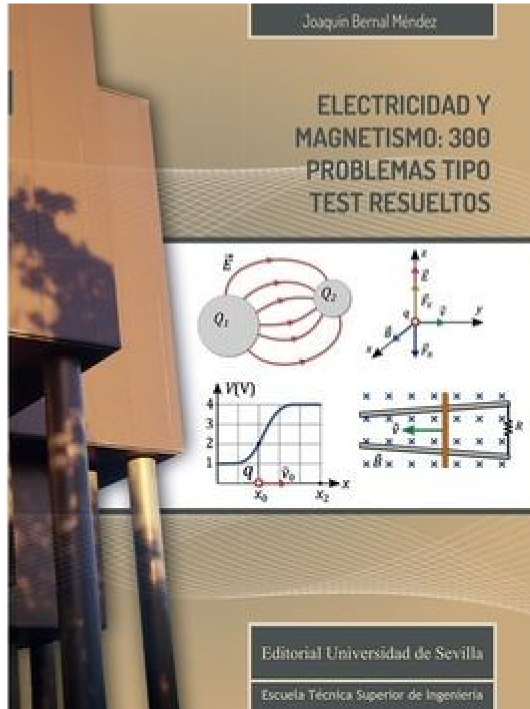
Física II



Electricidad y magnetismo: 300 problemas tipo test resueltos, de Joaquín Bernal Méndez, editado por la Universidad de Sevilla (2020), que reúne preguntas tipo test de exámenes de electricidad y magnetismo de Física II. Disponible en, por ejemplo, la copistería de la ETSI de Sevilla.

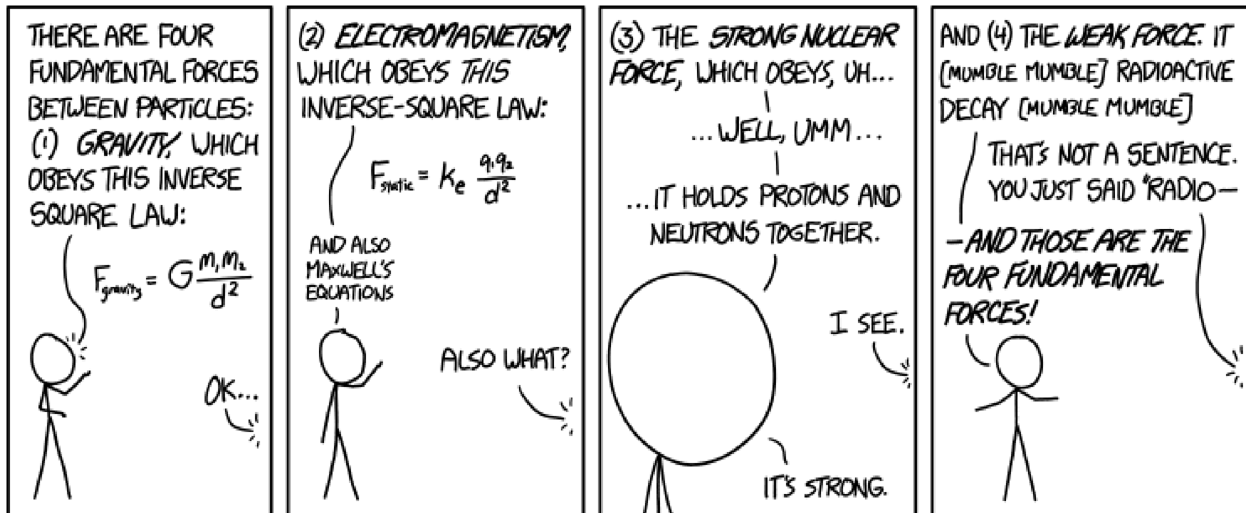
Introducción al electromagnetismo

1 Las cuatro fuerzas de la naturaleza

En una descripción fundamental de los procesos físicos, estos pueden considerarse como manifestaciones de cuatro interacciones:

- Gravedad
- Electromagnetismo
- Interacción nuclear fuerte
- Interacción nuclear débil

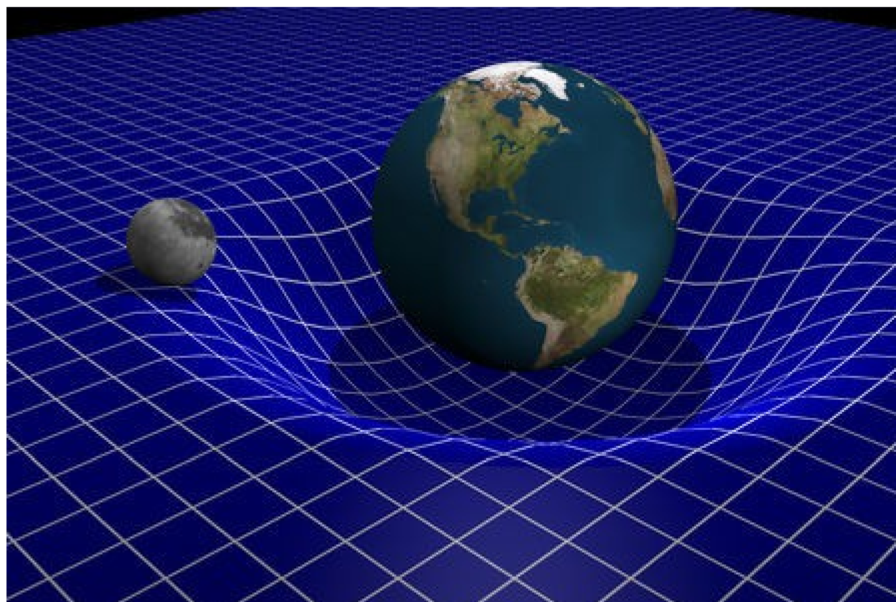
En este modelo (el llamado “modelo estándar”) lo que vemos como diferentes fuerzas macroscópicas (elásticas, de rozamiento, impulsos en las colisiones, etc.) son en realidad manifestaciones de estas interacciones fundamentales. Las principales propiedades de cada una son:



De xkcd

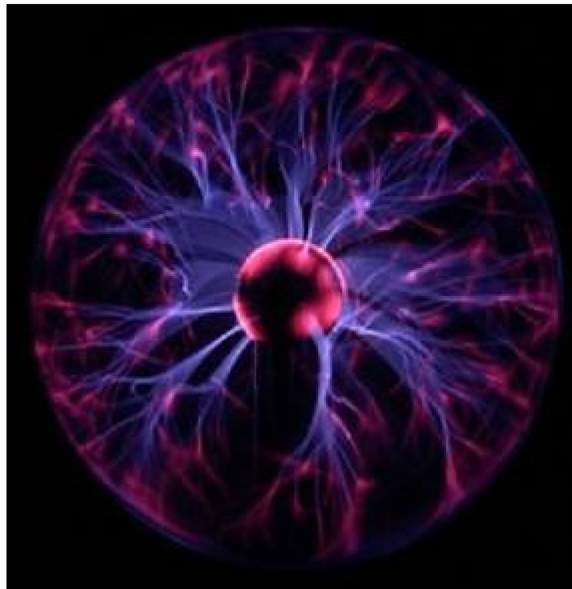
Gravedad

Es una interacción entre masas. Su principal efecto a escala humana es el peso y a grandes escalas es la responsable del movimiento planetario y estelar. Es una fuerza de largo alcance (teóricamente infinito).



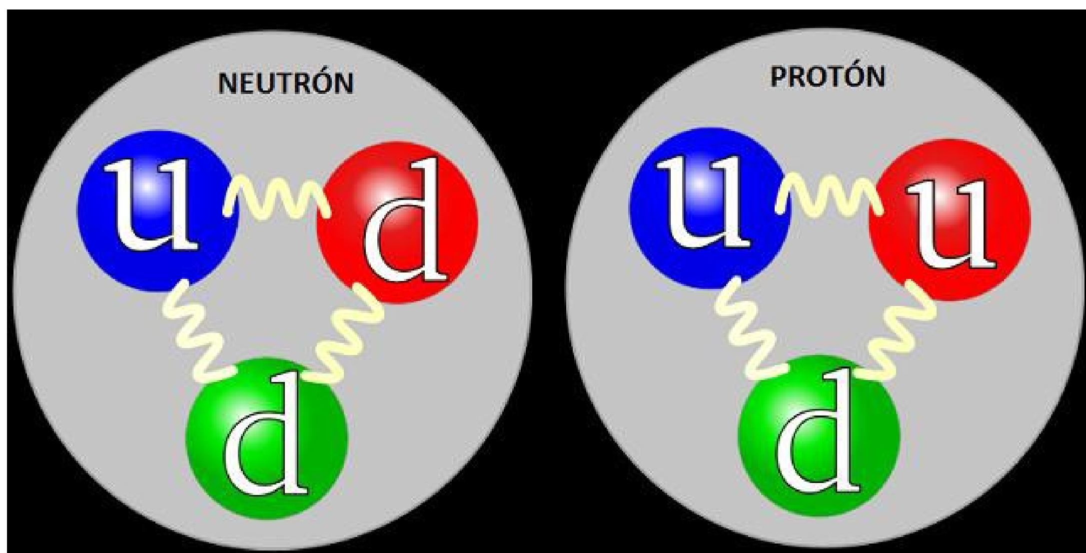
Electromagnetismo

Es la interacción entre cargas eléctricas, que se manifiesta por medio de campos eléctricos y de campos magnéticos, relacionados entre sí. Es una fuerza de largo alcance (teóricamente infinito), mucho más intensa que la gravedad.

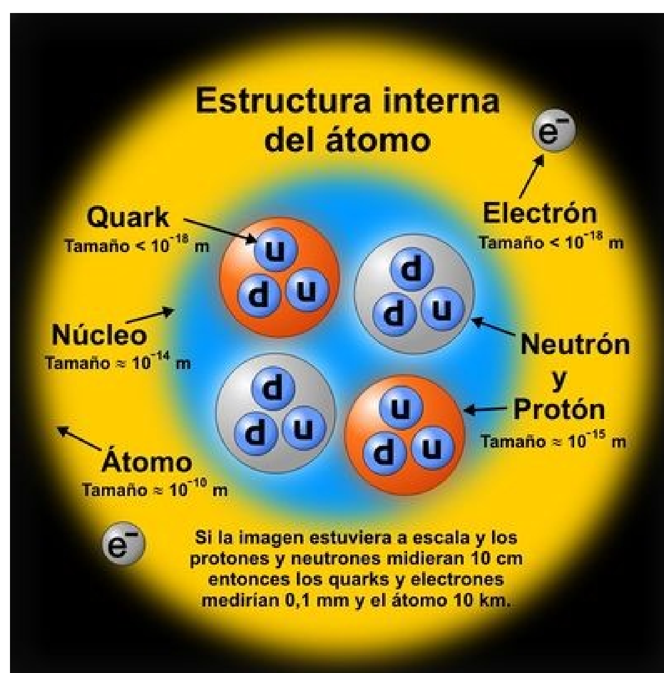


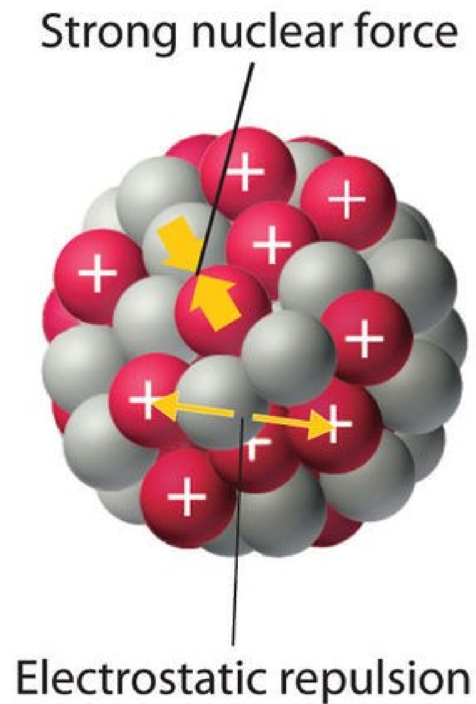
Fuerza nuclear fuerte

Es una interacción entre partículas elementales (quarks) caracterizadas por un tipo de carga llamado “color”. Los quarks se asocian formando protones y neutrones.



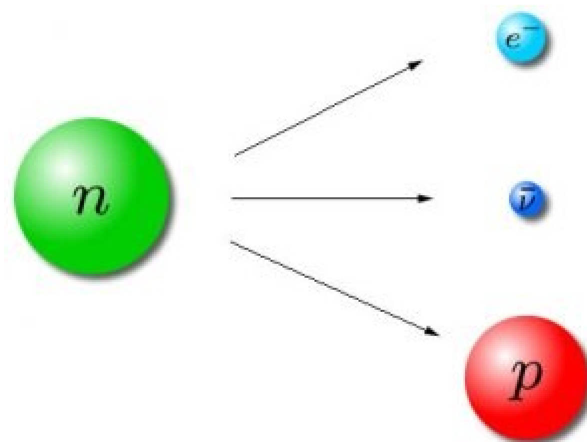
La fuerza nuclear fuerte es responsable de la cohesión de los núcleos, ya que es capaz de vencer la repulsión eléctrica entre los protones. Es una fuerza de muy corto alcance; a distancias mayores de 10^{-13} es inapreciable.

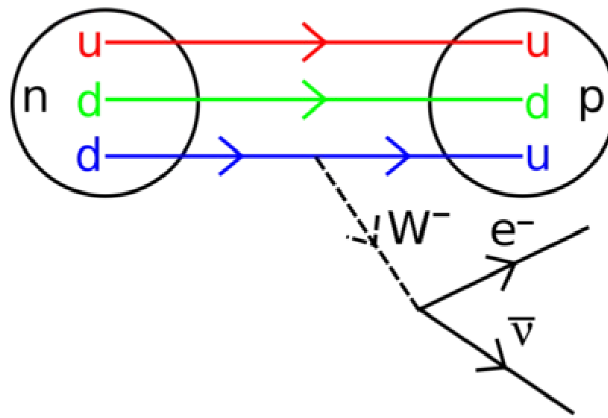




Fuerza nuclear débil

Es responsable de algunos procesos nucleares, como la desintegración beta del neutrón, que espontáneamente se descompone en un protón, un electrón y un antineutrino. Es también de muy corto alcance y mucho menos intensa que el electromagnetismo y la fuerza nuclear fuerte.





De estas cuatro fuerzas, las dos nucleares tienen efectos solo indirectos a escala macroscópica. La gravedad es muy débil y solo es apreciable si la acumulación de masa es muy grande (por ejemplo, el peso de los objetos que manejamos es una fuerza apreciable porque la Tierra tiene una masa de unos 6×10^{24}kg).

Esto quiere decir que *todas* las fuerzas que apreciamos a nuestro alrededor, excluyendo el peso, son fuerzas electromagnéticas. Una fuerza de contacto, como la que produce un cuerpo que empuja a otro, es realmente una fuerza de repulsión entre las nubes electrónicas de los átomos de un cuerpo con las de los del otro.

2 Interacción electromagnética

El electromagnetismo corresponde a la interacción entre cargas eléctricas. Se describe en términos de cargas que interaccionan por medio de campos eléctricos y magnéticos. La teoría electromagnética nace de la síntesis efectuada por Maxwell de las teorías existentes sobre las fuerzas eléctricas y las fuerzas magnéticas, hasta entonces tratadas como fuerzas separadas aunque relacionadas.

En el electromagnetismo hay *fuentes*, que son las partículas que producen los campos. Estas fuentes son las cargas eléctricas y las corrientes eléctricas (más los dipolos magnéticos, responsables del magnetismo de algunos materiales, como el hierro). Estas fuentes producen dos campos, el campo eléctrico y el magnético, que a su vez pueden considerarse como dos aspectos del mismo campo electromagnético. Los dos campos actúan sobre las cargas y corrientes produciendo fuerzas sobre ellas y causando su movimiento (que a su vez modifica los campos eléctrico y magnético).

Así mismo, un campo eléctrico variable en el tiempo genera un campo magnético y viceversa, aunque no haya cargas ni corrientes presentes. Esta es la base de las *ondas electromagnéticas*, que se propagan por el espacio vacío.

3 Carga eléctrica

La carga eléctrica es una propiedad fundamental de la materia. Una determinada partícula posee carga o es neutra, pero no se puede describir qué es la carga eléctrica. El electromagnetismo es una interacción entre partículas cargadas y una partícula posee carga cuando interacciona electromagnéticamente.

Aunque no se pueda decir qué es la carga, si se pueden caracterizar sus propiedades principales.

3.1 Propiedad escalar

La carga de un sistema es una propiedad escalar, caracterizada por una magnitud y un signo, pero no tiene dirección ni sentido.

Se mide en el SI en un culombio (C) definido como

$$1\,\mathrm{C} = 1\,\mathrm{A}\cdot\mathrm{s}$$

(con la A de amperio, que se ve al estudiar la corriente eléctrica). Un culombio es una cantidad gigantesca, imposible de reunir en la práctica debido a la repulsión entre cargas del mismo signo. Por ello, es mucho más frecuente usar unidades como nanoculombios o picoculombios.

3.2 Dos tipos de carga

Existen dos variedades de carga eléctrica. A diferencia de la masa, que es solo de un tipo, o del color de los quarks (que es de tres variedades), la carga eléctrica se presenta en dos tipos diferentes, denominados por convenio *carga positiva* (que representamos con el signo + y el color rojo) y *carga negativa* (representada por el signo − y el color azul). La carga positiva es la que es del mismo tipo que la del protón y la negativa la que es del mismo tipo que la del electrón.

El que haya solo dos tipos de carga permite sumarlas como números ordinarios, de manera que si se unen dos partículas de cargas q_1 y q_2, la carga del conjunto es $q_1 + q_2$ (esto también se puede hacer con la masa,

pero no con el color de los *quarks* ¿cuánto es la suma de unir una partícula “roja” con una “verde”?).

3.3 Ley de conservación de la carga

La carga se conserva. Esta es una de las propiedades básicas de la interacción electromagnética. A diferencia de otras magnitudes, como la energía mecánica o la entropía, la carga se conserva en cualquier sistema. Esto quiere decir que

> *En cualquier punto del espacio, la carga no se crea ni se destruye.*

o, expresado de forma más precisa, cuya formulación matemática veremos más adelante:

> *Para cualquier volumen, el cambio de la carga contenida en su interior se produce siempre por una entrada o salida a través de la frontera, nunca por producción o destrucción en el volumen.*

Hay que precisar qué significa que no se puede producir carga, ya que, como hemos comentado antes, puede ocurrir que un neutrón -que no tiene carga- se desintegre, produciendo un protón, que es una partícula cargada. Lo que ocurre es que al mismo tiempo se genera un electrón, que es una partícula con una carga opuesta a la del protón, de manera que la carga total permanece constante.

3.4 Cuantización de la carga. Densidad de carga

En los primeros tiempos de la teoría electromagnética se consideraba que la electricidad era un fluido (aun se habla de “corte de fluido eléctrico”), que se podía dar en cualquier cantidad. Sin embargo, los experimentos de Thomson, descubridor del electrón en 1897, mostraron que la carga presente en cualquier sistema es siempre un múltiplo entero de una carga fundamental

$$e = 1.602\,176\,565(35)\times 10^{-19}\,\mathrm{C} \simeq 1.6\times 10^{-19}\,\mathrm{C}$$

Las partículas elementales tienen siempre una carga que es un múltiplo entero de esta: un protón tiene una carga + *e* y un electrón una carga − *e*, los neutrones, neutrinos y fotones tienen carga 0. Los átomos y moléculas, compuestos de estas partículas, tienen una carga que será

$$q = Ze = (N_p - N_e)e$$

siendo N_p y N_e el número de protones y electrones, respectivamente. Esto se extiende a cualquier trozo de materia, que tendrá por tanto una carga que será un múltiplo entero de la carga elemental.

Ahora bien, para cualquier cantidad finita de materia, el número de cargas contenidas es gigantesco. Tomemos un elemento de volumen microscópico de agua, de 1 μm³ de volumen. La cantidad de moléculas contenidas en él es

$$N = \frac{(1.00\,\mathrm{g/cm^3}) \times (10^{-4}\,\mathrm{cm})^3}{18\,\mathrm{g/mol}} \times 6.023 \times 10^{23} \frac{\mathrm{moleculas}}{\mathrm{mol}} = 3.35 \times 10^{10} \mathrm{moleculas}$$

Cada molécula contiene 10 protones y 10 electrones, lo que nos da 0.67 *billones* de cargas elementales, la mitad de cada signo.

El que el número de cargas en cualquier medio material sea tan gigantesco tiene tres consecuencias prácticas importantes:

- Si a esta cantidad le sumamos o restamos unos cuantos electrones, el efecto puede tratarse como un diferencial de carga. Por ello, para el electromagnetismo macroscópico, la carga puede tratarse como un continuo, y se pueden hacer integrales y derivadas como con cualquier otra cantidad.
- Al decir que un volumen es neutro o que está descargado, no estamos diciendo que no haya cargas en él, sino que hay tantas cargas positivas como negativas (y puede haber billones de cada tipo). De un volumen material descargado siempre vamos a poder extraer carga porque hay millones disponibles.
- El manejo de un número tan grande de cargas impide tratarlas individualmente mediante sumatorios. Se hace preciso trabajar con *densidades de carga*.

3.4.1 Densidades de carga

- **De volumen**, ρ: Si dividimos un volumen en elementos microscópicos (de 1μm³, por ejemplo), definimos la densidad volumétrica de carga como la suma de todas las cargas que hay dentro dividida por el volumen del elemento

$$\rho(\vec{r}) = \frac{1}{\Delta v} \sum_{q_i \in \Delta v} q_i$$

siendo $\vec{r}$ la posición del elemento de volumen. Esta densidad se mide en C/m³. Conocida la densidad de carga, el diferencial de carga contenida en un elemento y la carga total de todo el volumen valen

$$\mathrm{d}q = \rho\,\mathrm{d}v \qquad Q = \int_V \mathrm{d}q = \int_V \rho(\vec{r})\,\mathrm{d}v$$

- **De superficie**, σ_s: En ocasiones toda la carga neta de un sistema está concentrada en una capa muy fina. En ese caso se define la densidad de carga superficial (medida en C/m²) como

$$\sigma_s(\vec{r}) = \frac{1}{\Delta S} \sum_{q_i \in \Delta S} q_i \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{d}q = \sigma_s\,\mathrm{d}S \qquad Q = \int_S \sigma_s\,\mathrm{d}S$$

- **Lineal**, λ: En sistemas como un hilo la carga se distribuye a lo largo de una línea (curva en general). En ese caso se define la densidad lineal de carga (medida en C/m) como

$$\lambda(\vec{r}) = \frac{1}{\Delta l} \sum_{q_i \in \Delta l} q_i \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{d}q = \lambda\,\mathrm{d}l \qquad Q = \int_L \lambda\,\mathrm{d}l$$

En general podemos tener una combinación de todos los tipos de densidades, por lo que la carga total será la suma de todas ellas

$$Q = \sum_i q_i + \int_L \lambda\,\mathrm{d}l + \int_S \sigma_s\,\mathrm{d}S + \int_V \rho\,\mathrm{d}v$$

3.4.2 Densidades uniformes

En muchos problemas prácticos se dice “una carga Q distribuida uniformemente en el volumen” o “un anillo cargado uniformemente con carga Q” o similar. En estos casos se nos está dando el tipo de distribución (si es de volumen, lineal, etc.), el valor de la carga total, y se nos dice que la carga tiene una densidad uniforme, es decir, que es la misma para todos los puntos. En esos casos, lo primero es determinar la densidad correspondiente, y luego recurrir a las expresiones para el cálculo de campos y potenciales eléctricos.

Si nos dicen que tenemos una carga Q distribuida uniformemente, su densidad será

$$\rho = \frac{Q}{V}$$

que para el caso de una esfera maciza se reduce a

$$\rho = \frac{3Q}{4\pi R^3}$$

Análogamente si tenemos el caso de una carga distribuida uniformemente en una superficie esférica

$$\sigma_s = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

Y si es en un anillo

$$\lambda = \frac{Q}{L} = \frac{Q}{2\pi R}$$

4 Leyes del electromagnetismo

A modo de introducción y resumen, vamos a enunciar las leyes que gobiernan la interacción electromagnética clásica. Estas leyes fueron formuladas por Maxwell en 1861-1862 y en combinación con la ley de Lorentz para la fuerza sobre una carga eléctrica permiten describir todos los fenómenos electromagnéticos, por diferentes que sean.

4.1 Ley de Lorentz

La expresión que da la fuerza sobre una carga puntual *q* que se mueve en un campo electromagnético lo da la *Ley de Lorentz*:

$$\vec{F} = q\left(\vec{E}(\vec{r}) + \vec{v} \times \vec{B}(\vec{r})\right)$$

siendo $\vec{r}$ la posición instantánea que la carga y $\vec{v}$ su velocidad. Vemos que los campos eléctrico y magnético actúan de diferente manera sobre una carga, requiriendo la fuerza magnética que la carga esté en movimiento.

De la expresión de la ley de Lorentz, obtenemos las unidades de medida de los dos campos:

- El campo eléctrico se mide en N/C (aunque es más frecuente medirlo en V/m, que es la misma unidad)
- El campo magnético se mide en N/(C·m/s) = N/(A·m). A esta unidad se la denomina *tesla* (T)

En esta expresión, los campos son los producidos por el resto de cargas del universo, ya que una carga no produce fuerza sobre sí misma.

Nótese que en la ley de Lorentz no precisamos saber quién produce los campos: si es una carga, un conjunto de ellas, o una distribución continua, o si están en movimiento o en reposo. Lo único que necesitamos es el valor del campo en la posición de la carga. Por ello, la introducción de los campos transforma un problema de fuerzas a distancias entre cargas, en uno local, donde cada carga solo percibe lo que le rodea.

Si conocemos las distribuciones de campos, el problema mecánico para el movimiento de la carga consiste en la resolución de las leyes de Newton

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = q\left(\vec{E}(\vec{r}) + \vec{v}\times\vec{B}(\vec{r})\right)$$

La solución de este problema dinámico puede ser extremadamente complicada incluso para casos de campos simples. Entre los que tienen solución analítica están:

El movimiento de una carga en un campo eléctrico uniforme, sin campo magnético
: Este problema es equivalente al de una partícula sometida a la acción del peso, y el resultado es un movimiento parabólico

El caso de una carga puntual en el campo eléctrico de otra carga puntual en reposo
: En este caso el campo magnético es nulo y el problema es equivalente al del movimiento planetario. El resultado es que la carga describe una cónica (circunferencia, elipse, parábola o hipérbola).

El caso de una carga en un campo magnético uniforme, sin campo eléctrico
: tal como se ve en un problema el resultado es un movimiento helicoidal (que puede ser rectilíneo o circular en casos particulares).

4.2 Ecuaciones de Maxwell

La ley de Lorentz nos da la fuerza sobre una carga conocidos los campos eléctrico y magnético. Las ecuaciones de Maxwell nos describen cómo son estos campos en función de las cargas que los producen y cómo se relacionan entre sí. Las ecuaciones de Maxwell son cuatro, cada una con un nombre propio

4.2.1 Ley de Gauss

El flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada es igual a la carga encerrada por la superficie, dividida por una constante universal, denominada *permitividad del vacío*

$$\oint \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q_{\mathrm{int}}}{\varepsilon_0}$$

4.2.2 Ley de Faraday

La circulación del campo eléctrico a lo largo de una curva cerrada es igual a la derivada temporal, cambiada de signo, del flujo magnético a través de una superficie apoyada en dicha curva y orientada según la regla de la mano derecha

$$\oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

4.2.3 Ley de Gauss para el campo magnético

El flujo del campo magnético a través de toda superficie cerrada es nulo

$$\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

4.2.4 Ley de Ampère-Maxwell

La circulación del campo magnético a lo largo de una curva cerrada es proporcional a la suma de dos términos: uno igual a la corriente eléctrica que atraviesa una superficie apoyada en una curva y otro proporcional a la derivada temporal del flujo eléctrico

$$\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \mu_0 \left(I + \varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \right)$$

5 Campos

La interacción entre las cargas eléctricas puede expresarse mediante fuerzas de acción a distancia, tal como hizo Newton con la ley de la Gravitación Universal. En esta formulación la Tierra atrae a la Luna simplemente porque está ahí, sin importar qué haya entre los dos cuerpos. La ley de Coulomb para la fuerzas entre cargas sigue la misma filosofía.

Sin embargo, es mucho más productivo el concepto, inventado por Faraday, de campo eléctrico, campo magnético (y campo electromagnético, fusión de los dos). Por medio del campo, la interacción entre dos cargas se separa en dos partes:

- Por un lado, la simple existencia de una carga provoca una perturbación en el espacio, que denominamos su campo electromagnético. Esta perturbación se extiende a todo el

espacio, no solamente en la posición de la carga, aunque lógicamente es más intensa cuanto más nos acercamos a ella.
- Al situar una segunda carga, esta lo que percibe no es a la primera, sino al campo que crea, es decir, el campo actúa como intermediario para la interacción entre las cargas.

La analogía mecánica más sencilla es con un resorte (esta analogía es muy adecuada, pues el campo eléctrico se comporta en muchos aspectos como una fuerza elástica, y usaremos la analogía reiteradamente). Si tenemos dos masas sujetas en los extremos de un resorte, al tirar de una de ellas, podremos pensar que la otra ejerce sobre ésta una fuerza dada por la ley de Hooke $\vec{F} = -k\vec{r}$. Sin embargo, es más simple pensar que la fuerza la ejerce el propio muelle y que lo que nota la segunda masa no es la presencia de la primera masa, sino el muelle al que esta sujeta. Con el campo electromagnético es exactamente lo mismo, solo que ahora el muelle es invisible (pero, como sabe cualquiera que haya acercado dos imanes por sus polos del mismo signo, es claramente perceptible).

El estudio del electromagnetismo, por tanto, se separa en dos problemas relacionados:

1. El estudio de los campos eléctricos y magnéticos creados por cargas en reposo o en movimiento.
2. El estudio del efecto que esos campos tienen sobre otras cargas.

La segunda parte contiene en gran medida elementos de dinámica, pues se trata de analizar la evolución de un sistema sabiendo las fuerzas que actúan sobre él.

Aquí nos centraremos sobre todo en la primera parte, determinando campos eléctricos y magnéticos en diferentes sistemas.

Una carga eléctrica produce un campo electromagnético, que se manifiesta de dos campos diferentes:

- El campo eléctrico, $\vec{E}(\vec{r})$.
- El campo magnético, $\vec{B}(\vec{r})$

El eléctrico se produce en cualquier circunstancia, mientras que el magnético sólo cuando la carga se encuentra en movimiento. Estos

campos interactúan entre sí y a través del fenómeno de la inducción, un campo eléctrico produce uno magnético y viceversa.

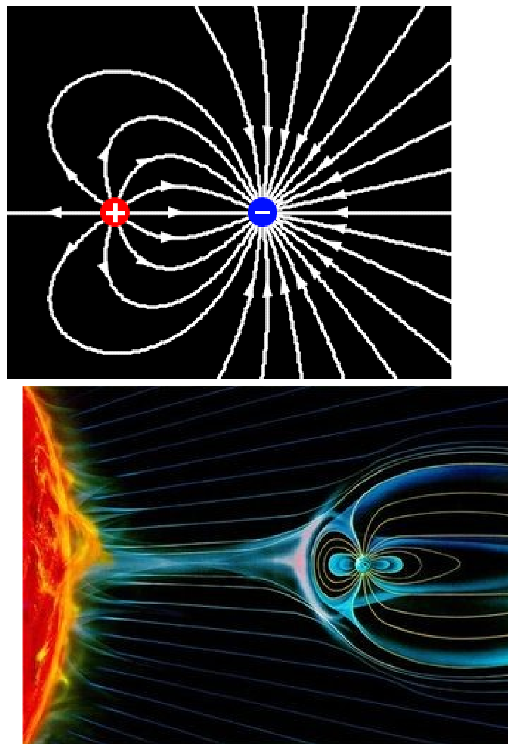
Matemáticamente, un campo vectorial es una función matemática que a cada punto del espacio le hace corresponder un vector, que es el valor del campo en dicho punto

$$\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$$

Esto convierte a un campo vectorial en un *vector ligado*, asociado a cada punto. No tenemos permiso, por tanto, para desplazarlo de un punto a otro o sumar los campos de diferentes puntos.

5.1 Líneas de campo

Una de las herramientas más útiles para visualizar los campos vectoriales consiste en trazar sus *líneas de campo*. Una línea de campo es una curva que en todo punto es tangente a la dirección del campo en dicho punto.

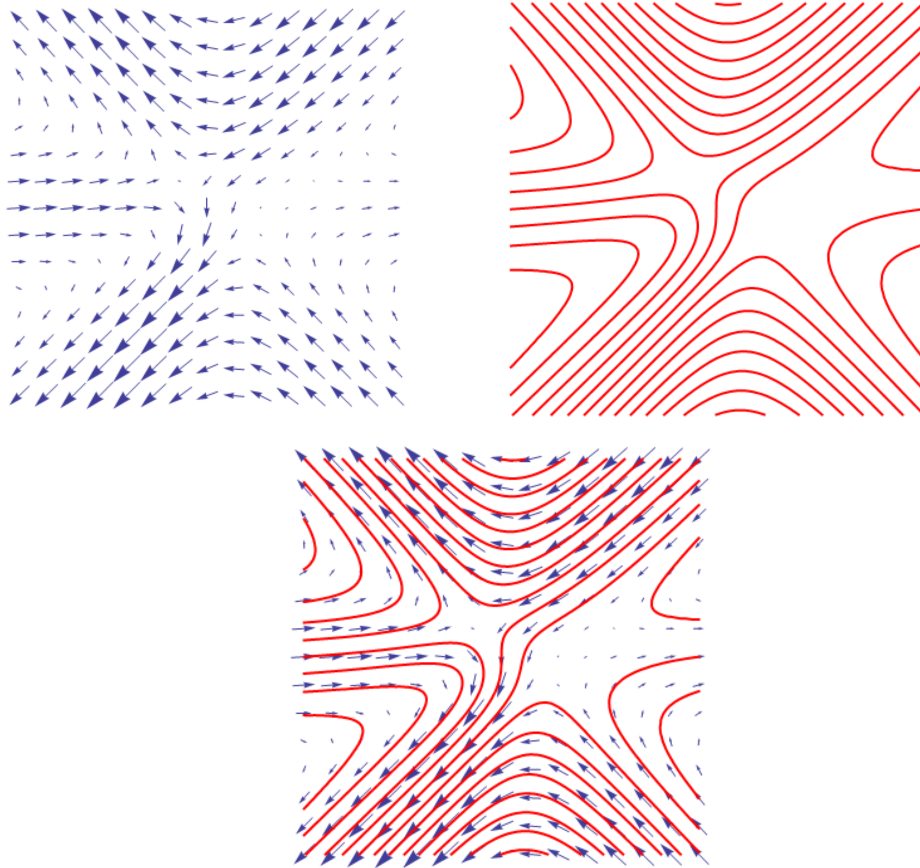


Matemáticamente, la ecuación de una línea de campo se halla partiendo de un punto del espacio. En ese punto el campo eléctrico apunta en una dirección determinada. Se realiza un desplazamiento en dicha dirección, llegando a un punto próximo, en el cual el campo apuntará

en una dirección ligeramente diferente, se continúa en esa dirección y así sucesivamente. Para cada paso se cumple

$$\mathrm{d}\vec{r} = \vec{E}(\vec{r})\,\mathrm{d}\theta$$

siendo θ un parámetro que nos da los diferentes puntos de la curva.



Dado que los campos poseen un único valor en cada punto, por cada punto del espacio pasa una y solo una línea de campo, que por tanto no se cortan entre sí.

Las líneas de campo constituyen una visualización de los campos eléctricos y magnéticos, pero nada más:

- Al hablar de los campos, se suele decir, por ligereza del lenguaje, "y el campo se desvía hacia este lado", etc. El campo no se desvía hacia ningún sitio, ni se mueve de donde está. Lo que significa esta frase es que la línea de campo tangente al campo se curva en la dirección indicada.
- Las líneas no representan la dirección de movimiento de nada. Una carga que se libere en un campo eléctrico o magnético

describirá en general un movimiento complicado que puede ser ortogonal a las líneas de campo.

6 División del electromagnetismo

La teoría electromagnética es un cuerpo único descrito por un solo conjunto de leyes, conocidas como *ecuaciones de Maxwell*. Sin embargo, dada la enorme variedad de sistemas posibles, conviene hacer una división en dominios más reducidos, atendiendo esencialmente a la dependencia de los campos con el tiempo.

Electrostática

Consiste en el estudio de los campos y fuerzas producidos por cargas en reposo, en ausencia de campos magnéticos. A su vez, la electrostática se divide en dos partes principales:

- Electrostática en el vacío: describe los campos y fuerzas de cargas consideradas como entes que flotan en el vacío. Puesto que la materia es un 99% vacío, es útil como punto de partida.
- Electrostática en medios materiales: Apoyándose en lo anterior, estudia los campos y fuerzas cuando en el sistema existen materiales conductores y dieléctricos. Aunque en un medio conductor las cargas pueden moverse, se consideran solo los casos en que están en reposo (**equilibrio electrostático**).

Corriente eléctrica

Estudia el efecto del movimiento de cargas por el interior de los materiales. A su vez, se divide en dos casos:

- Corriente continua o estacionaria: es aquella que no depende del tiempo. Es un caso no electrostático (pues las cargas se mueven), pero que produce campos independientes del tiempo.

Magnetostática

Estudia los campos magnéticos independientes del tiempo, que son producidos por corrientes continuas o por dipolos magnéticos

(imanes). Como la electrostática, se divide en su estudio en el vacío y en medios materiales.

Electromagnetismo

Considera el caso general de campos eléctricos y magnéticos variables en el tiempo. En este caso, no se pueden considerar por separado, ya que los campos eléctricos inducen campos magnéticos y viceversa.

Óptica

Uno de los descubrimientos de Maxwell al establecer sus ecuaciones fue el incluir la luz como una forma de radiación electromagnética. Por ello, todas las leyes de la óptica pueden deducirse también de la teoría electromagnética, aunque suelen estudiarse por separado.

Principios de la electrostática

1 Concepto de electrostática

La *Electrostática* es la parte del electromagnetismo que estudia la interacción entre cargas eléctricas en **reposo**.

Por estar cargadas y a una cierta distancia, las partículas ejercen fuerzas eléctricas unas sobre otras. De acuerdo con la segunda Ley de Newton, el resultado de estas fuerzas debe ser un movimiento acelerado de las diferentes cargas. Supondremos que esto no ocurre porque actúan sobre ellas otras fuerzas no consideradas que retienen a las cargas en la misma posición.

A pesar de su aparente irrealidad (ya que una carga no puede mantenerse inmóvil flotando en el espacio), la electrostática posee una gran aplicación ya que no solo describe aproximadamente situaciones reales, sino porque sirve de fundamento para otras situaciones electromagnéticas. En el campo de la electrostática aparecen el principio de superposición, la ley de Gauss, el potencial eléctrico, la ecuación de Laplace… todos los cuales se utilizan más adelante.

La electrostática se subdivide en dos situaciones:

Electrostática en el vacío

Supone que las cargas están inmóviles flotando en el espacio.

Electrostática en medios materiales

Supone que las cargas se encuentran en el interior o en la superficie de medios materiales. A su vez, éstos se suelen clasificar en dos tipos:

Conductores

Son aquellos materiales (típicamente metálicos) que permiten el movimiento de cargas por su interior. En electrostática esto implica que las cargas se encuentran en equilibrio ya que pudiendo moverse no lo hacen.
Dieléctricos

Son aquellos materiales (típicamente plásticos) que no permiten el movimiento de cargas por su interior. En electrostática esto implica la existencia de cargas ligadas, que no pueden abandonar los átomos a los que pertenecen.

Aunque en la mayoría de los casos prácticos consideraremos cargas dentro de medios materiales, la electrostática en el vacío es válida como fundamento de todo lo que sigue, puesto que estos son vacío en su mayor parte.

2 Ley de Coulomb

La ley de Coulomb fue descubierta por Henry Cavendish, que no lo publicó. Varios años después, Coulomb redescubrió esta ley, publicándolo adecuadamente, por lo que recibe su nombre.

Es una ley física que nos describe la fuerza entre dos cargas **puntuales** en reposo. Nos dice que si tenemos dos cargas puntuales q_1 y q_2 situadas a una distancia d_{12}, aparece una fuerza eléctrica entre ellas tal que:

Módulo

- es proporcional al producto de las cargas.

- es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre las cargas.

Dirección

Es la de la recta que pasa por las dos cargas

Sentido

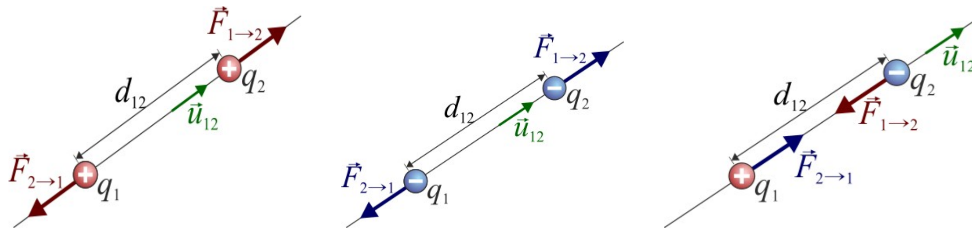
Depende del signo de las cargas

- Cargas del mismo signo se repelen
- Cargas de distinto signo se atraen

Matemáticamente esto se expresa como que la fuerza que produce la carga 1 sobre la 2 es

$$\vec{F}_{1\to 2} = k_e \frac{q_1 q_2}{d_{12}^2}\vec{u}_{12}$$

siendo $\vec{u}_{12}$ el vector unitario en la dirección de la recta que pasa por las dos cargas y lleva el sentido de la 1 a la 2, es decir, hacia fuera de las dos cargas. La fuerza que la 2 produce sobre la 1 se calculará del mismo modo, sustituyendo $\vec{u}_{12}$ por $\vec{u}_{21}$ que es el unitario opuesto.



Esta expresión es válida tanto si las cargas son del mismo signo como si son de signos opuestos. En el segundo caso, el producto de las cargas es negativo y resulta una fuerza atractiva.

La constante k_e universal que, por la forma en que se eligen las unidades en el SI tiene un valor

$$k_e = 8.986851134(13)\times 10^9 \frac{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2}{\mathrm{C}^2} \simeq 9\times 10^9 \frac{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2}{\mathrm{C}^2}$$

siendo el segundo valor mucho más fácil de recordar y con un error de solo el 0.1%.

Esta constante de proporcionalidad suele escribirse en la forma aparentemente más complicada

$$k_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \qquad \Rightarrow \qquad \varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi k_e} \simeq 8.854\times 10^{-12}\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2} = 8.854\frac{\mathrm{pF}}{\mathrm{m}}$$

La razón de escribirlo de esta forma se halla en la ley de Gauss.

Si lo que conocemos son los vectores de posición de las dos cargas respecto a un sistema de referencia, podemos escribir la ley de Coulomb en función de estos vectores, ya que

$$d_{12} = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1| \qquad\qquad \vec{u}_{12} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$$

y queda

$$\vec{F}_{1\to 2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}$$

Hay que destacar (porque es fuente de errores) el cambio del exponente del denominador de 2 a 3, al introducir una distancia más en la normalización del vector de posición relativo.

Como ilustración de la magnitud de la fuerza eléctrica podemos considerar la atracción entre un protón y un electrón que se hallan a una distancia de un radio de Bohr (tamaño del átomo de hidrógeno)

$$|q_p| = |q_e| = e = 1.602\times 10^{-19}\mathrm{C} \qquad a_0 = 5.29\times 10^{-11}\,\mathrm{m}$$

Resulta un módulo de la fuerza

$$|\vec{F}| = k_e\frac{e^2}{a_0^2} = \frac{9\times 1.6^2}{5.29^2}\times 10^{9-19-19+11+11}\mathrm{N} = 8.24\times 10^{-8}\,\mathrm{N}$$

Esta fuerza no parece excesivamente intensa, pero debemos tener en cuenta que actúa sobre un electrón, cuya masa es minúscula. La aceleración que produce esta fuerza es

$$|\vec{a}| = \frac{|\vec{F}|}{m} = \frac{8.24\times 10^{-8}}{9.1\times 10^{-31}\mathrm{kg}} = 9.04\times 10^{22}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 9.22\times 10^{21}g$$

Dicho de otra forma, la fuerza debida a un solo protón es 9000000000000000000000 veces la atracción gravitatoria debida a la Tierra entera.

Otra comparación posible es la de la fuerza eléctrica entre el protón y el electrón y la fuerza gravitatoria entre ellas. Su cociente vale

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{k_e q_1 q_2/d^2}{G m_1 m_2/d^2} = \frac{k_e e^2}{G m_e m_p} = 2.3\times 10^{39}$$

es decir, la fuerza eléctrica es 2300000000000000000000000000000000000000 veces más intensa.

3 Principio de superposición

La ley de Coulomb nos da la fuerza entre dos cargas puntuales, pero no nos dice nada de qué ocurre si tenemos más de dos cargas o estas no son puntuales.

Por ejemplo, supongamos que tenemos tres cargas alineadas y queremos hallar la fuerza sobre una de las cargas de los extremos. ¿Cómo influye la presencia de la carga central? ¿Impide que las cargas de los extremos se "vean", apantallándolas, o, por el contrario, no afecta a la fuerza entre ellas?

La evidencia es que ocurre lo segundo, lo que se puede expresar mediante el denominado *principio de superposición*:

> *Dado un sistema de cargas puntuales, la fuerza eléctrica sobre cada una de ellas es la suma vectorial de las fuerzas debidas a cada una de las demás cargas, como si el resto de cargas no estuvieran presentes*.

La última parte del enunciado es crucial. Es natural que la fuerza sobre una carga sea la suma de diferentes contribuciones, cada una debida a una carga diferente. Lo que es novedoso es que para calcular esa contribución podemos ignorar por completo la existencia del resto de cargas, es decir, podemos calcular cada término mediante la ley de Coulomb.

Así, si tenemos tres cargas, q_1, q_2 y q_3. La fuerza sobre la carga 1 será

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{2\to 1} + \vec{F}_{3\to 1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_3(\vec{r}_1 - \vec{r}_3)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|^3}$$

Más en general, si tenemos un sistema de N cargas actuando sobre una carga q_0, la fuerza sobre esta vendrá dada por la suma

$$\vec{F}_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_0 q_i(\vec{r}_0-\vec{r}_i)}{|\vec{r}_0-\vec{r}_i|^3}$$

Es importante no confundir el principio de superposición de fuerzas electrostáticas con la resultante sobre un sistema de partículas. El principio de superposición nos da la fuerza sobre una sola carga, pero si queremos hallar la fuerza sobre un conjunto de cargas (un sólido con miles de cargas, por ejemplo), habrá que calcular la resultante y, si es preciso, el momento de las fuerzas.

4 Campo eléctrico

4.1 Definición

La expresión de la fuerza sobre una carga puntual q_0 debida a un sistema de N cargas puede factorizarse también en la forma

$$\vec{F} = q_0\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i(\vec{r}_0-\vec{r}_i)}{|\vec{r}_0-\vec{r}_i|^3}\right)$$

y reescribirse como el producto

$$\vec{F} = q_0\vec{E}(\vec{r}_0) \qquad\qquad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i(\vec{r}-\vec{r}_i)}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}$$

siendo $\vec{E}(\vec{r})$ el *campo eléctrico* debido a las N cargas. Si examinamos la expresión vemos que en el campo eléctrico no aparece ninguna propiedad de la carga que experimenta la fuerza, ni su magnitud q_0, ni su posición $\vec{r}_0$. El campo eléctrico es consecuencia exclusivamente de la distribución de N cargas.

Matemáticamente, se trata de un campo vectorial que a cada punto del espacio $\vec{r}$ le asigna un vector $\vec{E}(\vec{r})$.

Físicamente entendemos el campo electrostático como una perturbación en el espacio producida por la presencia de cargas eléctricas en reposo

El campo es un concepto primario. No se puede describir qué es el campo eléctrico, sino solo qué efectos produce sobre otras cargas.

Aunque hemos introducido el campo eléctrico a partir de un sumatorio, no es así como se define, ya que en general ni conocemos cuántas cargas tenemos ni dónde se encuentra cada una. Puede definirse de una manera operativa, esto es, dando un procedimiento para su medida. Para ello se considera una carga muy pequeña q_0 y se sitúa en un campo eléctrico. Con la medida de un dinamómetro se mide la fuerza sobre ella. Se define el campo eléctrico en la posición de la carga como

$$\vec{E}(\vec{r}) = \lim_{q_0 \to 0} \frac{\vec{F}}{q_0}$$

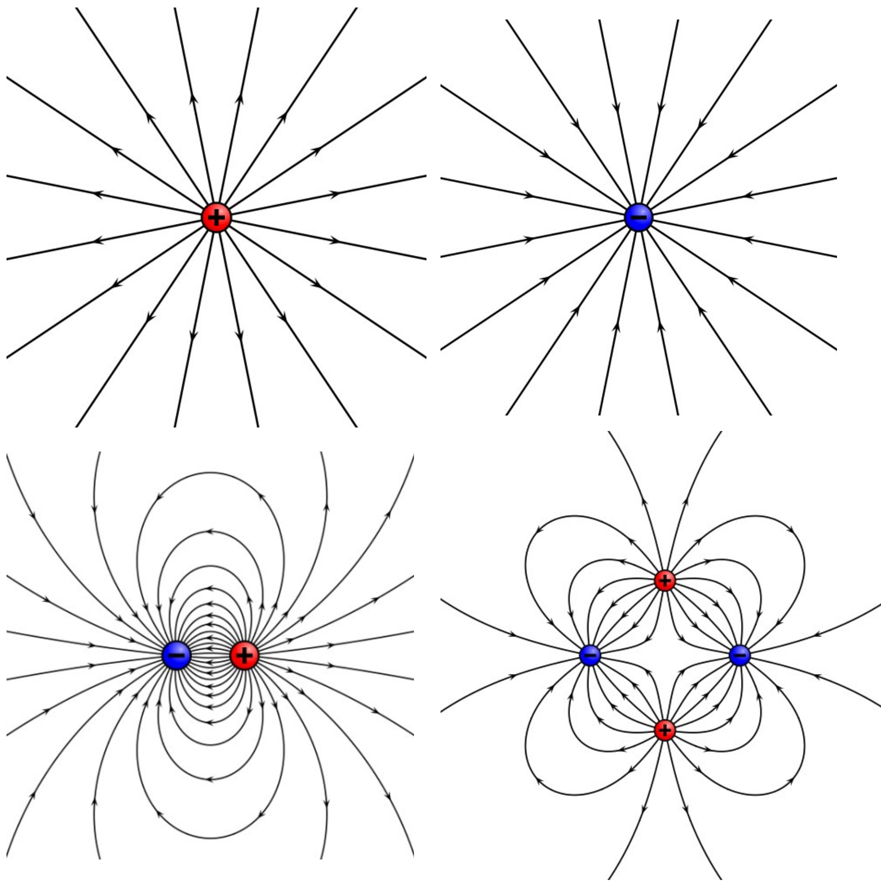
El límite se toma porque idealmente se considera que la carga que se coloca no debe afectar a lo que ya había, para lo cual debe ser lo más pequeña posible.

4.2 Campo de una carga puntual

Particularizando el sumatorio, si tenemos una sola carga puntual situada en el origen de coordenadas ($\vec{r}_1 = \vec{0}$) el campo eléctrico producido por ella será

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q\vec{r}}{|\vec{r}|^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2}\vec{u}_r$$

Este campo es radial desde la carga. Va hacia afuera si esta es positiva (se dice que tenemos un *manantial* de campo) y hacia adentro si es negativa (tenemos un *sumidero*). El campo decae como el cuadrado de la distancia. A doble distancia, cuarta parte de campo.



(ilustraciones obra de Geek3 para Wikipedia).

4.3 Reinterpretación de la ley de Coulomb

Una vez que tenemos el campo eléctrico creado por una carga puntual podemos reinterpretar la ley de Coulomb.

Tal como la formularon Cavendish y Coulomb, la fuerza entre cargas es una ley de acción a distancia. Tenemos dos cargas separadas y cada una percibe la presencia de la otra.

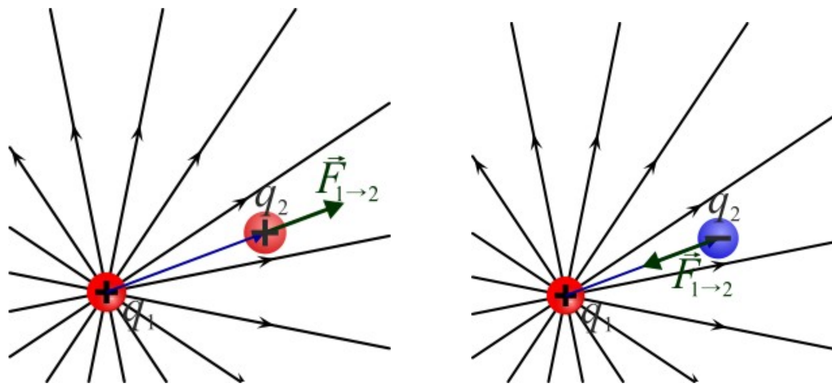
En términos del campo eléctrico, la fuerza la da una ley local. Una carga, positiva o negativa, por el hecho de existir crea una perturbación en el espacio que denominamos campo eléctrico. La segunda carga lo que percibe es el campo de la primera en el punto en que se encuentra, pero no “sabe” quién crea ese campo, si una carga puntual, o una esfera cargada, por ejemplo.

Matemáticamente, si tenemos una carga q_1 en $\vec{r}_1$ y situamos una carga q_2 en el punto $\vec{r}_2$, la fuerza que experimenta es el producto de la carga por el campo en la posición que se encuentra

$$\vec{F}_{1\to 2} = q_2\vec{E}_1(\vec{r}_2) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2 q_1 \vec{u}_{12}}{d_{12}^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2 q_1(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}$$

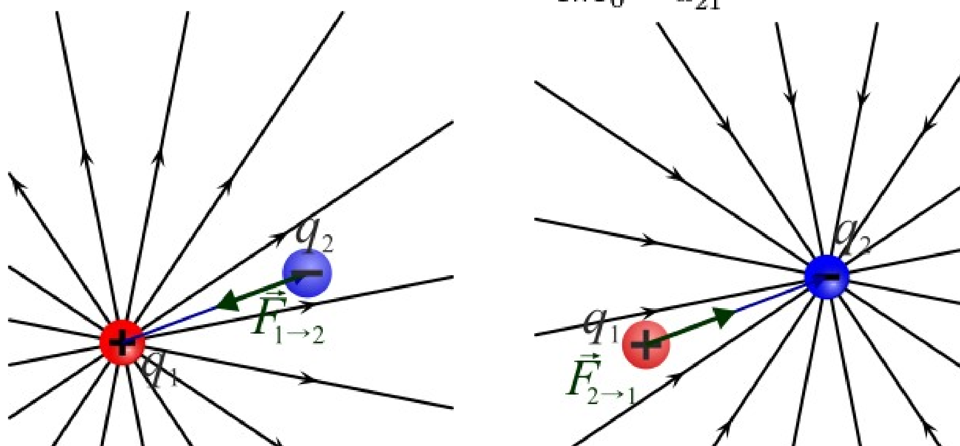
siendo $\vec{u}_{12}$ el vector unitario en la dirección de la recta que pasa por las dos cargas y en el sentido de la carga 1 a la 2. Esta es la conocida como *ley de Coulomb* para fuerzas entre cargas puntuales.

Dado que la fuerza es proporcional a la carga q_2, si tenemos una carga q_1 positiva, la fuerza sobre q_2 será de repulsión si q_2 es positiva y de atracción si es negativa, aunque en los dos casos el campo de q_1 vaya hacia afuera.



La fuerza que experimenta la carga 1 se debe a que percibe el campo de la carga 2

$$\vec{F}_{2\to 1} = q_1\vec{E}_2(\vec{r}_1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2 \vec{u}_{21}}{d_{21}^2}$$

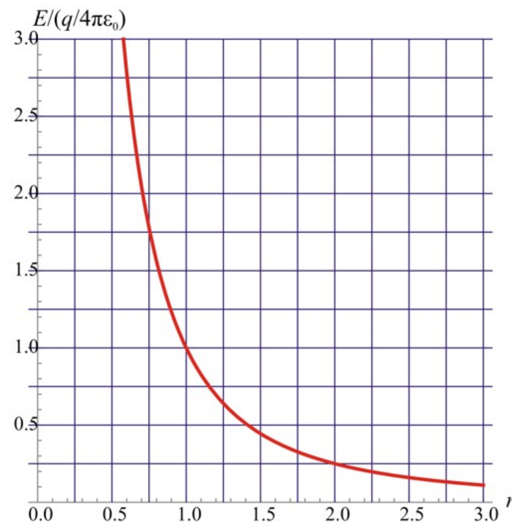


Puesto que el producto de cargas es conmutativo, la distancia es la misma en los dos casos y el vector unitario tiene la misma dirección,

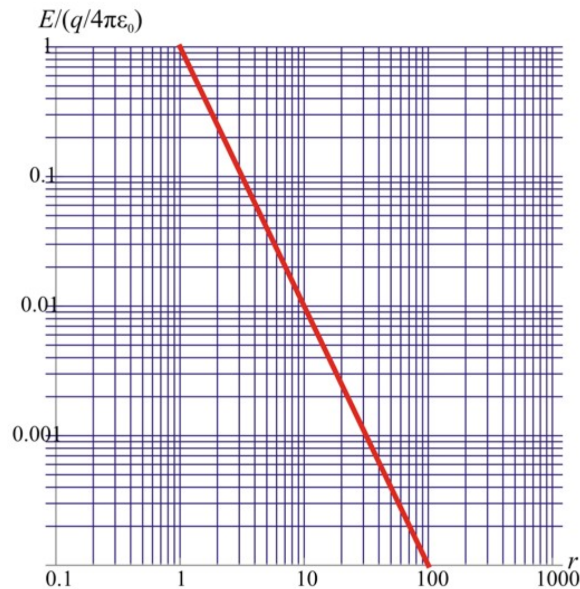
pero sentido opuesto al anterior, se llega a que la ley de Coulomb cumple la tercera ley de Newton

$$\vec{F}_{1\to 2} = -\vec{F}_{2\to 1}$$

Como en la propia ley de Coulomb, el campo eléctrico decae como la inversa del cuadrado de la distancia. Esto quiere decir que a doble distancia, cuarta parte del campo. Si trazamos la intensidad del campo eléctrico frente a la distancia en una gráfica log-log (escala logarítmica en ambos ejes) el resultado es una recta de pendiente -2, ya que



$$\ln(|\vec{E}|) = \ln\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right) = \ln\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\right) - 2\ln(r)$$



5 Líneas de campo eléctrico

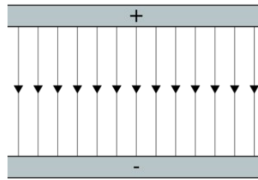
Como con cualquier otro campo, se pueden trazar las líneas de campo eléctrico, como aquellas curvas que son tangentes al campo eléctrico en cada punto. Estas curvas son soluciones de la ecuación diferencial

$$\mathrm{d}\vec{r} = \vec{E}(\vec{r})\,\mathrm{d}\theta \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}\theta} = \vec{E}(\vec{r})$$

siendo θ un parámetro que nos permite etiquetar los puntos de cada curva. Estas ecuaciones diferenciales suelen ser extremadamente complejas y no poseen soluciones analíticas salvo en los casos más triviales, por lo que su solución requiere el uso de ordenadores, como en el caso de las cuatro cargas representado más arriba.

Existe casos particulares importantes:

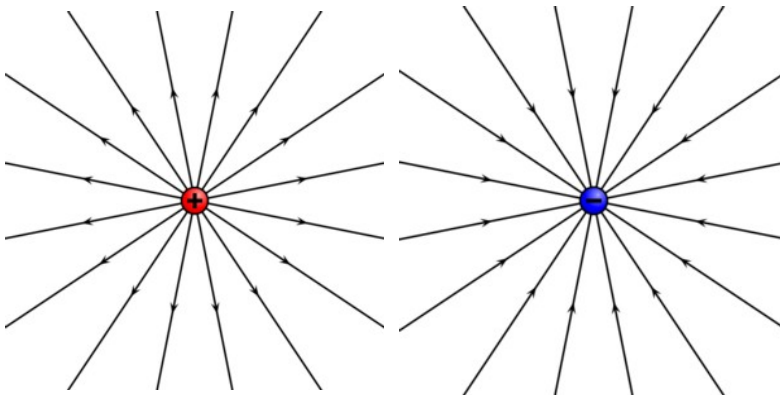
- Un campo uniforme (independiente de la posición) tiene líneas de campo que son rectas paralelas. Este es el caso del campo eléctrico en el interior de un condensador plano.



- Un campo central

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\vec{u}_r \qquad\qquad \text{(campo central)}$$

en el cual el campo es siempre puramente radial, las líneas de campo son semirrectas radiales. Este es el caso del campo de una carga puntual, positiva o negativa,



6 Campo de una distribución de carga

6.1 De cargas puntuales

El principio de superposición se extiende a cualquier número de cargas. Si tenemos N cargas puntuales, situadas en los puntos $\vec{r}_i$, el campo en cualquier punto vale

$$\vec{E}_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{d_{iP}^2}\vec{u}_{iP}$$

o, usando las posiciones de cada una

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i(\vec{r}-\vec{r}_i)}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}$$

6.1.1 El caso de dos cargas puntuales

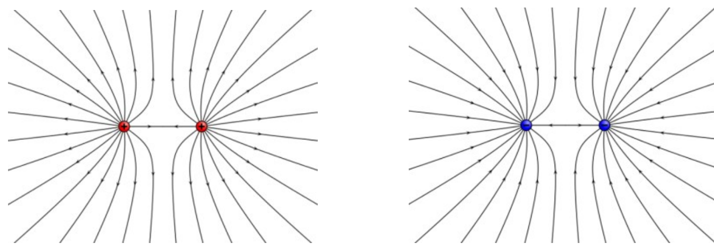
Supongamos que tenemos dos cargas puntuales q_1 y q_2 situadas a una cierta distancia *b*. Podemos tomar un sistema de ejes tal que la primera carga se encuentre en el origen de coordenadas y la segunda en el punto $b\vec{i}$. Con esta elección, el campo eléctrico se expresa

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1(\vec{r}-\vec{r}_1)}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3} + \frac{q_2(\vec{r}-\vec{r}_2)}{|\vec{r}-\vec{r}_2|^3}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1(x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k})}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{q_2((x-b)\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k})}{((x-b)^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right)$$

Esta fórmula genera tiene varios casos particulares de interés:

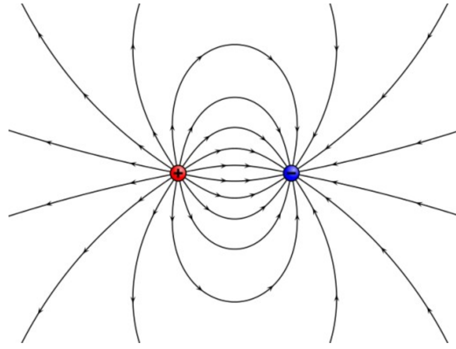
Dos cargas iguales

Si $q_1 = q_2 = q$ el campo tiene simetría respecto al plano central. En los puntos de dicho plano el campo total es tangente al plano ortogonal al eje que pasa por las dos cargas. Además el campo tiene simetría de revolución respecto de este eje.
Las líneas de campo en este sistema salen de cada carga y se alejan de ellas, sin cortarse nunca, si las cargas son positivas. Si son negativas acaban en ellas. Las líneas que parten o llegan a cada carga llenan la mitad del espacio. Visto de lejos ($r \gg b$), el campo es aproximadamente el de una sola carga puntual de valor $2q$.



Dos cargas opuestas de la misma magnitud

Si $q_1 = +q$ y $q_2 = -q$ tenemos lo que se llama un *dipolo*. En este caso el campo en el plano central es siempre ortogonal a dicho plano.
Todas las líneas de campo eléctrico parten de la carga positiva y van a parar a la negativa



6.2 De una distribución continua

Al considerar un medio material, se hace imposible conocer la posición de cada una de los trillones de cargas que lo componen.

Por ello, se debe trabajar con densidades de carga. Dividimos el volumen del material en elementos microscópicos (pero que contienen millones de cargas), de forma que la carga de cada elemento es dq. Entonces, el campo en un punto P es la generalización de la suma anterior a una integral

$$\vec{E}_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\mathrm{d}q'}{d_{qP}^2}\vec{u}_{qP}$$

siendo d_{qP} la distancia desde cada elemento de carga al punto donde queremos hallar el campo y $\vec{u}_{qP}$ el unitario en la dirección desde el elemento de carga al punto en cuestión.

Esta expresión se puede escribir empleando las posiciones de las cargas. Si designamos por $\vec{r}$ la posición del punto donde deseamos hallar el campo eléctrico y por $\vec{r}'$ la posición de un elemento de carga ('ojo con la prima '!) queda

$$d_{qP} = |\vec{r} - \vec{r}'| \qquad\qquad \vec{u}_{qP} = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

y queda la integral

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\mathrm{d}q'(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

Dependiendo del tipo de distribución de carga que tengamos, el tipo de integral variará.

- Volumétrica: Si la carga está repartida en un volumen

  $$\mathrm{d}q' = \rho(\vec{r}')\,\mathrm{d}v' \qquad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}')\,\mathrm{d}v'(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

  donde ρ será en general una función de la posición $\vec{r}'$, que habrá que integrar.

- Superficial: Si la carga está distribuida sobre una superficie

  $$\mathrm{d}q' = \sigma_s(\vec{r}')\,\mathrm{d}S' \qquad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\sigma_s(\vec{r}')\,\mathrm{d}S'(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

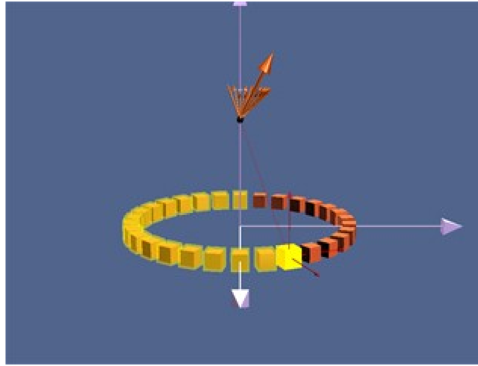
  Obsérvese que, a diferencia del flujo, aquí el diferencial de superficie es escalar, e igual al área del elemento.

- Lineal: Si la carga está repartida a lo largo de una línea

  $$\mathrm{d}q' = \lambda(\vec{r}')\,\mathrm{d}l' \qquad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_L \frac{\lambda(\vec{r}')\,\mathrm{d}l'(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$$

- Caso general: En un problema general podemos tener todos los tipos de densidades simultáneamente y además cargas puntuales aisladas. El campo en cada punto será la superposición de los campos individuales

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\int_V \frac{\rho(\vec{r}')\,\mathrm{d}v'(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} + \int_S \frac{\sigma_s(\vec{r}')\,\mathrm{d}S'(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} + \int_L \frac{\lambda(\vec{r}')\,\mathrm{d}l'(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} + \sum_i \frac{q_i(\vec{r}-\vec{r}_i)}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}\right)$$



En casi todos los casos estas integrales son imposibles de hallar analíticamente. Sin embargo, se prestan a un cálculo numérico sencillo de implementar en un ordenador: se divide la distribución en un número grande de elementos, se calcula la contribución de cada uno al campo y se halla la suma de todos ellos, como si fuera un conjunto de cargas puntuales. Existen diferentes mejoras a este método, que aumentan la precisión o la velocidad del cálculo.

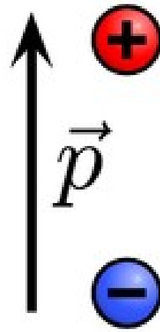
Entre los casos que sí se pueden hallar analíticamente de forma sencilla están:

- El campo en los puntos del eje de un anillo circular cargado uniformemente.
- El campo en los puntos del eje de un disco cargado uniformemente.
- El campo de un plano cargado uniformemente, o cualquier combinación de planos cargados uniformemente.
- El campo de un segmento rectilíneo y de un hilo rectilíneo infinitamente largo.

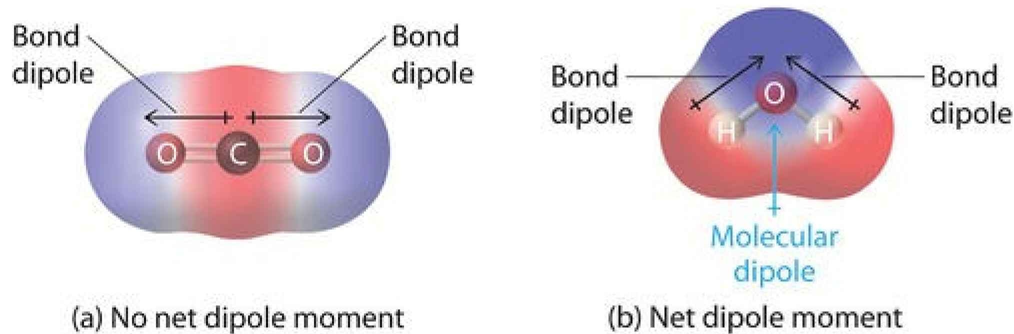
Dipolo eléctrico

1 Definición. Momento dipolar

En su versión más sencilla, un dipolo es un sistema formado por dos cargas de la misma magnitud y signo opuesto, separadas una cierta distancia.



Más en general, un sistema neutro pero en el que el centro de las cargas positivas no coincide con el de las negativas también se conoce como un dipolo. Un ejemplo típico es la molécula de agua. Al ser el oxígeno más electronegativo que el hidrógeno, se produce una acumulación de carga negativa en el lado en que se halla el oxígeno, y de carga positiva en el opuesto.



No todas las moléculas poseen momento dipolar. El dióxido de carbono, por ejemplo, es una molécula simétrica que no tiene momento dipolar neto ya que el centro de las cargas positivas y el de las cargas negativas es el mismo.

El dipolo se caracteriza matemáticamente por su *momento dipolar*, que para dos cargas puntuales se define como

$$\vec{p} = q\,\Delta\vec{r}$$

siendo $\Delta\vec{r}$ el vector de posición relativa que va de la carga negativa a la positiva.

Esta expresión se generaliza fácilmente a una distribución arbitraria observando que equivale a

$$\vec{p} = q(\vec{r}_+ - \vec{r}_-) = (+q)\vec{r}_+ + (-q)\vec{r}_-) = q_+\vec{r}_+ + q_-\vec{r}_-$$

Y de aquí pasamos a una distribución de cargas puntuales

$$\vec{p} = \sum_i q_i \vec{r}_i$$

y a una distribución volumétrica, superficial o lineal

$$\vec{p} = \int_Q \vec{r}\,\mathrm{d}q$$

El momento dipolar es una magnitud vectorial cuya unidad en el SI es el culombio·metro.

2 Efecto de un campo externo uniforme sobre un dipolo

Si un dipolo se encuentra inmerso en un campo eléctrico uniforme, $\vec{E}_0$, aparecen sobre él dos fuerzas: una sobre la carga positiva y otra sobre la negativa (más si hay más de dos cargas, como en el caso del agua).

Por ser nula la carga neta se anula la resultante de las fuerzas externas sobre el dipolo

$$\vec{F} = \vec{F}_+ + \vec{F}_- = (+q)\vec{E}_0 + (-q)\vec{E}_0 = (q-q)\vec{E}_0 = \vec{0}$$

Esto implica que, tal como se ve al estudiar la dinámica del sólido rígido, el CM del dipolo no tiende a moverse.

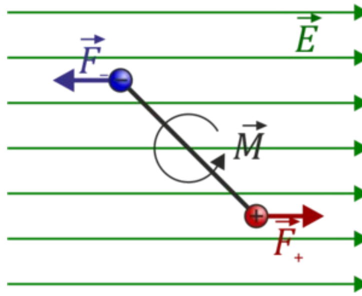
Sin embargo, sí que aparece un par de fuerzas, ya que las fuerzas no están aplicadas sobre la misma recta soporte. El momento del par vale

$$\vec{M} = \vec{r}_+ \times \vec{F}_+ + \vec{r}_- \times \vec{F}_- = q(\vec{r}_+ - \vec{r}_-) \times \vec{E}_0 = \vec{p} \times \vec{E}_0$$

Esta expresión se verifica también para distribuciones dipolares más complejas, como la de la molécula de agua. Para todas ellas

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}_0$$

El efecto de este par de fuerzas es girar el dipolo tendiendo a alinearlo con el campo eléctrico. Es el mismo principio que, en el campo magnético, explica el funcionamiento de una brújula.



3 Potencial y campo debido a un dipolo

Un dipolo, además de experimentar los efectos de un campo externo, también genera un campo propio.

3.1 Potencial eléctrico

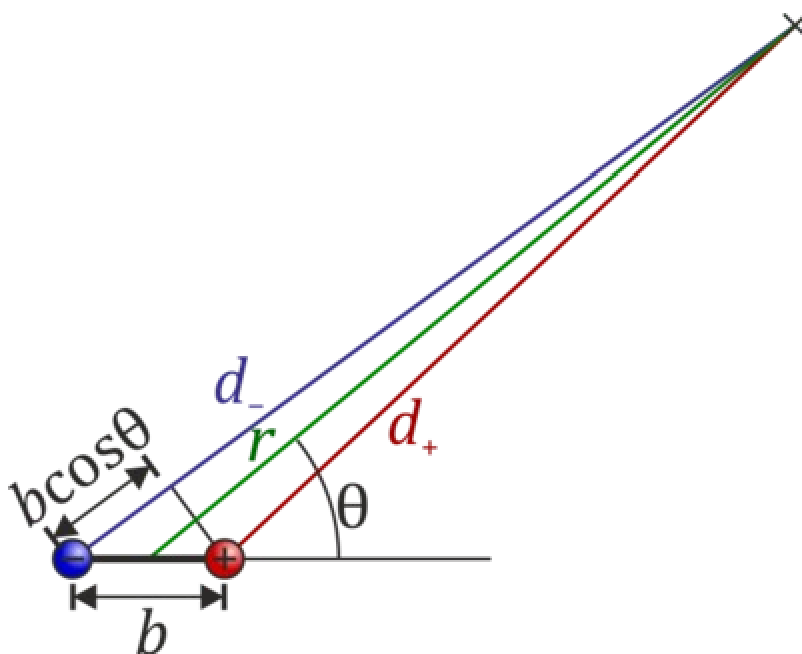
Supongamos un dipolo formado por dos cargas puntuales separadas una distancia b. El potencial eléctrico, en un punto $\vec{r}$ del espacio, debido a estas dos cargas será

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_+}{d_+} + \frac{q_-}{d_-}\right)$$

siendo d_+ y d_- las distancias a cada carga. Si sumamos las fracciones queda

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(d_- - d_+)}{d_+ d_-}$$

En la mayoría de las situaciones, el potencial y el campo del dipolo interesan a grandes distancias de éstos (comparadas con el tamaño del propio dipolo). Por ejemplo, una molécula de agua mide unos cuantos nanómetros. Una distancia de solo 1mm ya es un millón de veces más grande que el tamaño del dipolo.



En ese caso, podemos hacer la aproximación

$$d_{-} - d_{+} \simeq b\ \cos(\theta)$$

siendo θ el ángulo que el vector de posición forma con el momento dipolar. Por otro lado, para distancias muy grandes

$$d_{+} \simeq d_{-} \simeq r = |\vec{r}|$$

lo que nos permite reducir la expresión anterior a

$$V = \frac{qb\cos(\theta)}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{p\cos(\theta)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Esta expresión nos dice que el potencial de un dipolo, a diferencia del de una carga puntual, depende de la dirección de observación (a través del ángulo θ).

Depende de la distancia como $1 / r^2$, mientras que el de una carga puntual va como $1 / r$. Esto quiere decir que el potencial (y el campo) de un dipolo disminuyen más rápidamente con la distancia que el de la carga. Al multiplicar la distancia por 2, el potencial de una carga puntual se reduce a la mitad, pero el de un dipolo se reduce a una cuarta parte. Por ello, el efecto de un dipolo se hace imperceptible a cortas distancias. La interacción entre moléculas de agua es una acción de corto alcance, que le da cohesión al agua, pero no es suficiente para unir rígidamente las moléculas.

El potencial del dipolo se puede escribir en forma vectorial con ayuda del producto escalar

$$V(\vec{r}) = \frac{\vec{p}\cdot\vec{u}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

El potencial eléctrico debido a un dipolo es nulo en el plano perpendicular al momento dipolar y que pasa por el dipolo. El resto de las superficies equipotenciales son superficies cerradas de forma ovoidal.

3.2 Campo eléctrico

El campo eléctrico en cualquier punto del espacio puede calcularse a partir del potencial eléctrico como su gradiente cambiado de signo

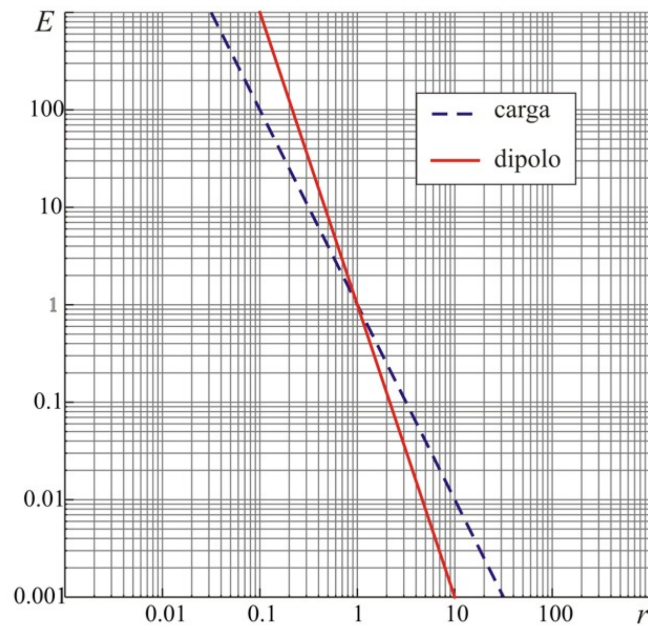
$$\vec{E} = -\nabla V$$

En el caso del dipolo, el cálculo requiere algo de álgebra en polares, por lo que pondremos directamente el resultado

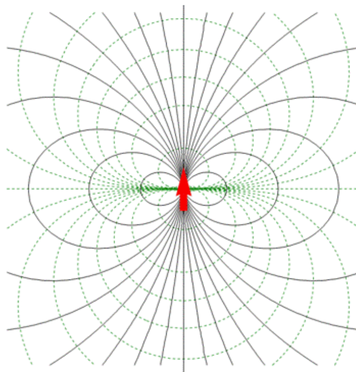
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{3(\vec{p}\cdot\vec{u}_r)\vec{u}_r - \vec{p}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}}{r^5}$$

Esta expresión nos dice que el campo eléctrico de un dipolo decae como el cubo de la distancia al dipolo.

En una gráfica log-log, resulta una recta de pendiente -3. Este decaimiento es más rápido que el de una carga puntual. Esta es la causa de que a grandes distancias el efecto de los dipolos sea despreciable frente a los de las cargas netas. Dado que el campo gravitatorio sí decae como $1/r^2$ y la Tierra es eléctricamente neutra (con lo que será un dipolo o distribuciones que producen un campo eléctrico aun más pequeño), esto explica que a distancias astronómicas la fuerza eléctrica sea despreciable frente a la gravitatoria, pese a ser una fuerza mucho más intensa cuando hablamos de partícula a partícula.

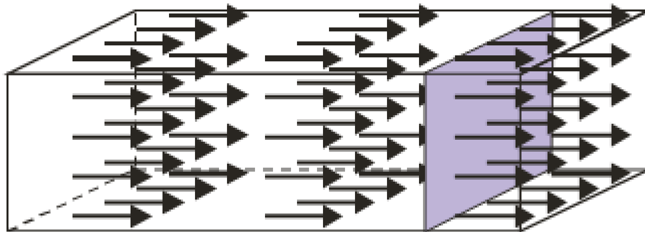


La forma de las líneas de campo eléctrico son arcos casi cerrados que parten de la carga positiva y acaban en la negativa.



1 Flujo de un campo vectorial

Un concepto básico en electromagnetismo y en mecánica de fluidos es el de *flujo*. La idea es sencilla: el flujo de un campo vectorial es una medida de "cuánto campo" atraviesa una superficie cerrada.



Para definir con precisión lo que se entiende por "cuánto campo", consideremos en primer lugar el ejemplo sencillo de una tubería por la que fluye agua de manera constante. Queremos saber cuánta agua sale por una boca que es un corte transversal de la tubería. En este caso el caudal, el volumen de agua que pasa en un intervalo $\mathrm{d}t$ es la contenida en una porción de tubería adyacente al orificio de salida

$$\mathrm{d}V = S\,\mathrm{d}x$$

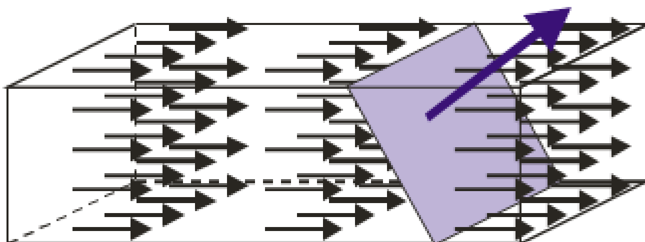
la longitud de la porción corresponde a la que le da tiempo a llegar a la salida en $\mathrm{d}t$

$$\mathrm{d}x = v\,\mathrm{d}t$$

de forma que el caudal es igual a

$$\dot{V} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \Phi = vS$$

La cantidad de agua es mayor cuanto más rápido se mueva el agua y cuando mayor sea la sección de la tubería.



Supongamos ahora que la boca de la tubería no es transversal sino oblicua. No podemos seguir usando la expresión anterior, ya que ahora

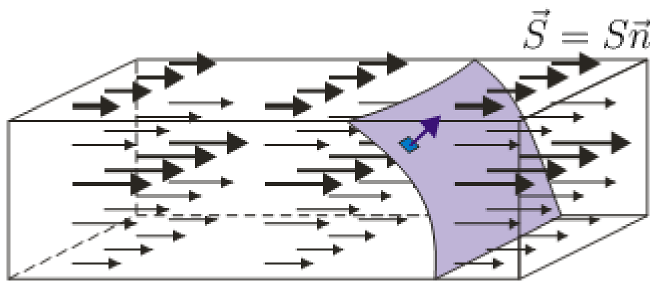
la sección tiene mayor área, pero la cantidad de agua que sale por la boca del tubo debería ser la misma que antes. La corrección que hay que hacer viene de que el vector velocidad puede descomponerse en dos partes, una perpendicular a la superficie y una tangencial a ella. Sólo la componente normal atraviesa la superficie. La tangencial "resbala" sobre ella. Por tanto, debemos escribir el flujo como

$$\Phi = v_n\, S$$

En forma vectorial, si $\vec{n}$ es el vector perpendicular a la superficie plana de la sección

$$v_n = \vec{v}\cdot\vec{n} \qquad \Rightarrow \qquad \Phi = \vec{v}\cdot\vec{n}S = \vec{v}\cdot\vec{S}$$

donde hemos definido el vector superficie como aquél que tiene por módulo el área de la superficie y como dirección y sentido los de un vector unitario normal a ésta.



La siguiente generalización consiste en suponer que la velocidad no tiene una distribución uniforme, sino que varía de un punto a otro y que la superficie sobre la que hallamos el flujo no es un plano sino que puede ser curvada. En ese caso, lo que se hace es descomponer la superficie en trocitos muy pequeños (elementos de superficie), para cada uno de los cuales se aplica la fórmula anterior

$$\mathrm{d}\Phi = \vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{S} \qquad\qquad \mathrm{d}\vec{S} = \mathrm{d}S\,\vec{n}$$

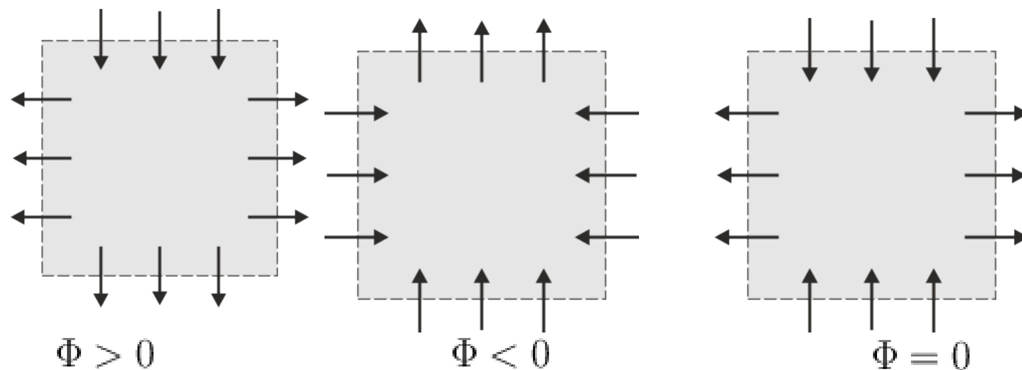
y el flujo total será la suma (integral) para toda la superficie.

$$\Phi = \int_S \vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

Como caso particular importante tenemos el de una superficie cerrada

$$\Phi = \oint \vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

donde el círculo en la integral representa que la superficie es cerrada. En el caso de una superficie cerrada, se considera siempre el sentido de la normal hacia el exterior de la superficie.



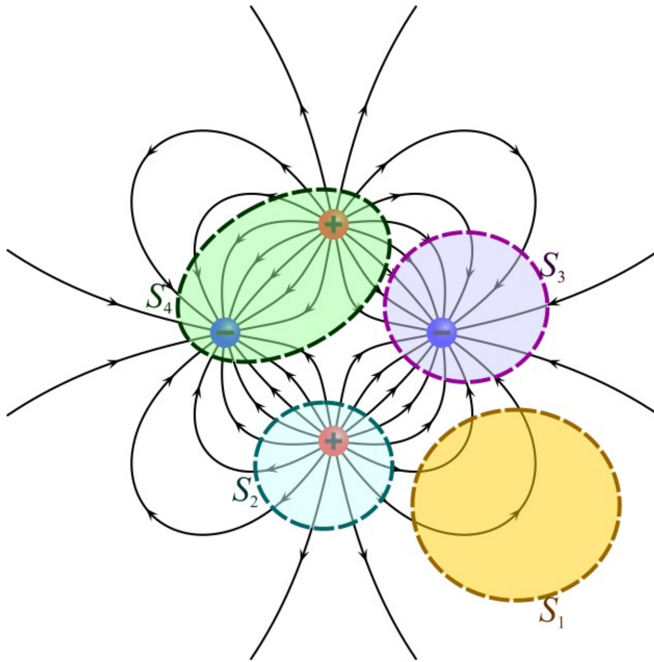
Para el caso de la superficie cerrada, si $\Phi > 0$ quiere decir que el campo sale, en promedio hacia afuera de la superficie. Se dice entonces que el campo posee *manantiales* en el volumen encerrado por la superficie (de los cuales “brota” el campo). Si $\Phi < 0$ quiere decir que el campo, en promedio, va hacia adentro. En ese caso se dice que el campo tiene *sumideros* (en los que se “destruye” el campo). Si el flujo es nulo quiere decir que en el interior del volumen hay tantos manantiales como sumideros

Geométricamente, el flujo de un campo a través de una superficie cerrada se puede representar como el número de líneas de campo que atraviesan dicha superficie.

2 Ley de Gauss

Una propiedad del campo eléctrico que se desprende del trazado de sus líneas de campo es la siguiente.

Consideremos, por ejemplo, el caso de cuatro cargas ilustrado anteriormente



- Si tomamos la superficie cerrada S_1, vemos que no encierra carga alguna, y que en ella hay tantas líneas de campo que entran como las que salen.
- En la superficie S_2, que envuelve a la carga positiva, las líneas de campo atraviesan la superficie hacia el exterior. Se dice que en esta región el campo es divergente.
- En S_3, en cambio, se envuelve una carga negativa y en ella el campo es convergente, atravesando las líneas de campo la superficie hacia adentro.
- En S_4 se envuelve una carga neta 0, y vemos que en ella también hay tantas líneas que entran como que salen.

Vemos que el hecho de que las líneas atraviesen la superficie hacia afuera o hacia adentro depende de las cargas que haya en el interior, y que si es nula (bien porque no hay nada, bien porque hay tantas positivas como negativas) hay tantas que entran como que salen.

Este es un resultado general. Matemáticamente se expresa con el concepto de flujo que es una medida de cuánto campo atraviesa una superficie. La ley física que describe este fenómeno es la ley de Gauss

> **Ley de Gauss:** El flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada es proporcional a la cantidad de carga encerrada por la superficie.

$$\oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q_{\mathrm{int}}}{\varepsilon_0}$$

Analizando cada uno de los términos de esta ecuación tenemos:

$\oint_S$ El símbolo de integral con un círculo representa la integración sobre una superficie cerrada.

$\vec{E}$ El campo eléctrico en los puntos de la superficie. Este campo será en general función de la posición, por lo que no puede extraerse de la integral.

. El campo eléctrico es un vector y el diferencial de superficie también lo es. El flujo en cambio, es un número con signo. El producto escalar nos garantiza el carácter escalar del resultado.

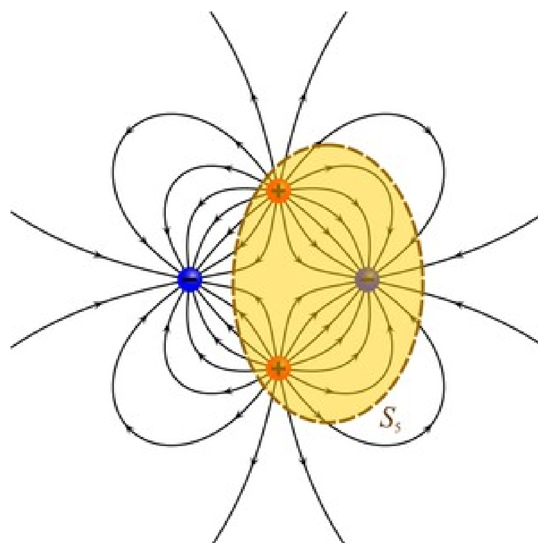
$\mathrm{d}\vec{S}$ Cuando se integra sobre una superficie, se divide ésta en elementos de área dS. Se define el vector diferencial de superficie como uno que tiene por módulo el área del elemento, por dirección la perpendicular a la superficie y por sentido el que va hacia el exterior

$$\mathrm{d}\vec{S} = \vec{n}\,\mathrm{d}S$$

(¡ojo a la diferencia entre $\mathrm{d}S$y $\mathrm{d}\vec{S}$!).

Q_{int} es la carga encerrada por la superficie. Ojo que no es toda la carga del sistema. Puede haber cargas en el exterior, que producen campo en la superficie (por ejemplo, las cuatro cargas respecto de la S_1 anterior), pero que no están encerradas por ella. Aquí:

- Si la carga neta encerrada es positiva: El flujo neto es hacia el exterior y el campo es divergente (caso de la superficie S_2). Esto no excluye que pueda contener cargas negativas y que haya algunas líneas de campo hacia adentro, como en la superficie S_5.



- Si la carga neta encerrada es negativa: El flujo neto es hacia el interior y el campo es convergente (caso de S_3).
- Si la carga neta encerrada es cero: El flujo es nulo y hay tanto campo que entra como que sale. Es importante recordar que un flujo nulo no implica un campo nulo

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0 \qquad \not\Rightarrow \qquad \vec{E} = \vec{0}$$

ε_0 La constante de proporcionalidad es una constante universal denominada *permitividad del vacío*, que tiene un valor exacto

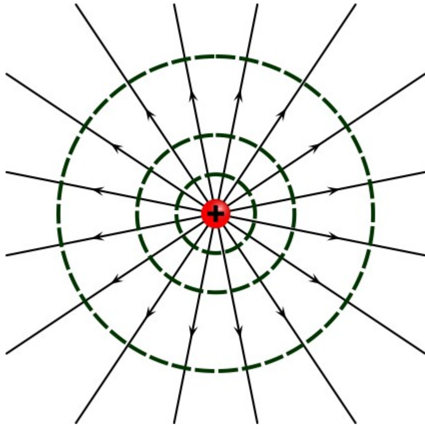
$$\varepsilon_0 = \frac{10^7}{35950207149472 7056\pi}\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2} \simeq 8.854\times 10^{-12}\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2} = 8.854\,\frac{\mathrm{pF}}{\mathrm{m}}$$

Aunque se suele aproximar en la forma más sencilla

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = k_e \simeq 9\times 10^9\frac{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2}{\mathrm{C}^2}$$

2.1 Prueba de la ley de Gauss

La ley de Gauss puede demostrarse para el caso electrostático a partir de la ley de Coulomb y el principio de superposición. No obstante, su demostración requiere técnicas algo más avanzadas que las que aquí se exponen, por lo que solo daremos las ideas principales.



Partimos del campo eléctrico de una carga puntual

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\vec{u}_r}{r^2}$$

Si consideramos el flujo de este campo eléctrico a través de una superficie esférica concéntrica con la carga tenemos

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint_{r=\mathrm{cte}}\frac{\vec{u}_r\cdot\mathrm{d}\vec{S}}{r^2}$$

Ahora bien, para una superficie esférica, el diferencial de superficie es un vector radial y hacia afuera

$$\mathrm{d}\vec{S} = \mathrm{d}S\,\vec{u}_r \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{d}\vec{S}\cdot\vec{u}_r = \mathrm{d}S$$

por lo que la integral se reduce a una escalar

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint_{r=\mathrm{cte}}\frac{\mathrm{d}S}{r^2}$$

Por otra parte, al tratarse de una superficie esférica, r es el mismo para todos los puntos de la esfera, por lo que puede salir de esta integral y quedar

$$\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\oint_{r=\mathrm{cte}}\mathrm{d}S = \frac{qS}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Si sustituimos el área de la esfera

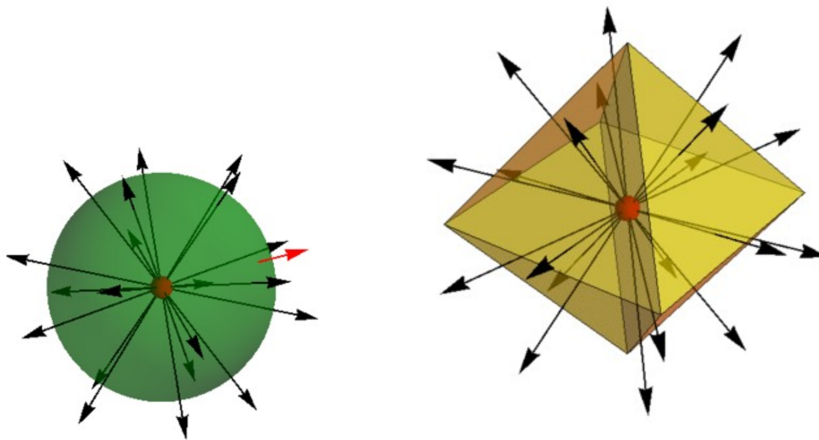
$$S = 4\pi r^2 \qquad \Rightarrow \qquad \Phi = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Es decir, resulta que para una superficie esférica concéntrica con la carga el flujo es el mismo *independientemente del radio de la esfera*. A medida que nos alejamos de la carga, el campo decrece como la inversa del cuadrado de la distancia, pero el área de la esfera crece como el cuadrado de la misma distancia, por lo que los dos factores se cancelan.

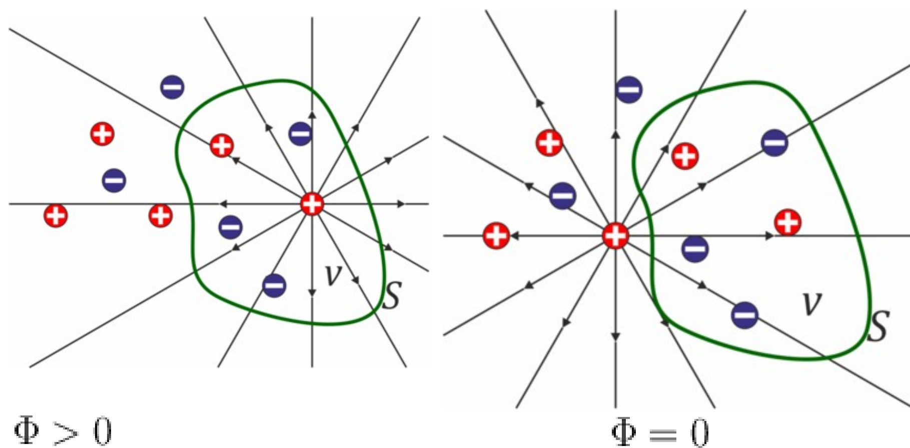
Podemos preguntarnos qué propiedades del campo eléctrico son las mismas independientemente de la distancia a la carga. Una es la magnitud de la carga que lo crea. Otra es el número de líneas de campo que atraviesan la superficie, que es lo que mide el flujo. Hemos obtenido que ambas cantidades son proporcionales.

El resultado se extiende ahora a otras superficies que no son esferas concéntricas. Puede demostrarse que el resultado es el mismo: para toda superficie cerrada S que envuelva a la carga

$$\Phi = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad\qquad (q \in S)$$



Este resultado también vale si la carga es negativa. En ese caso, las líneas van hacia adentro y el flujo es negativo.



Por otro lado, si tomamos una superficie que no envuelva a la carga, el número de líneas de campo que atraviesan la superficie hacia adentro iguala al de las que lo hacen hacia afuera, por lo que

$$\Phi = 0 \qquad\qquad (q \notin S)$$

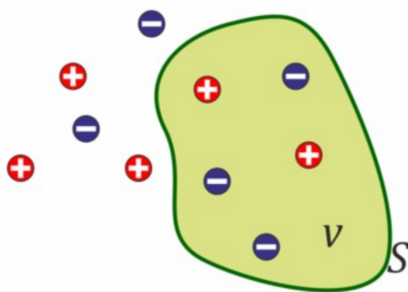
Esto para una carga individual. Si consideramos una distribución de cargas, aplicamos el principio de superposición

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots = \sum_i \vec{E}_i$$

Este principio también se aplica al flujo del campo eléctrico

$$\Phi = \oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \sum_i \oint \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

Para los flujos de las cargas individuales habrá cargas que están contenidas dentro de la superficie y cargas que estarán.



Las que están dentro dan una contribución al flujo mientras que las exteriores añaden una cantidad nula Por ello

$$\Phi = \sum_{q_i \in S} \frac{q_i}{\varepsilon_0} + \sum_{q_i \notin S} 0 = \frac{Q_{\mathrm{int}}}{\varepsilon_0}$$

siendo

$$Q_{\mathrm{int}} = \sum_{q_i \in S} q_i$$

la carga neta encerrada dentro de la superficie.

3 Campo de cargas puntuales

La ley de Gauss tiene validez universal y por tanto puede tomarse como punto de partida, junto con el resto de las ecuaciones de Maxwell, para deducir el resto de ecuaciones del electromagnetismo.

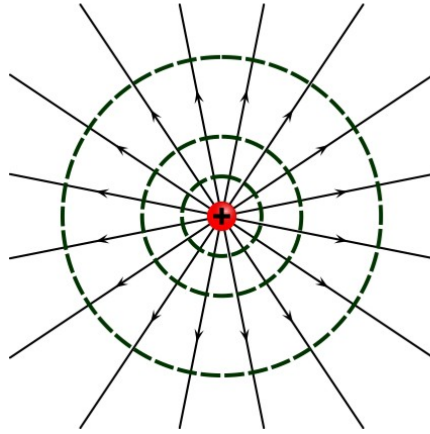
Una de las primeras aplicaciones de la ley de Gauss es la obtención del campo eléctrico creado por una carga puntual. Es decir, suponiendo que no la conociéramos de antes, podemos deducirla

Por la simetría del sistema, el campo creado por una carga va a ser central

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\vec{u}_r$$

siendo r la distancia a la carga, $\vec{r}$ el vector de posición respecto a la carga y $\vec{u}_r$ el unitario en la dirección radial.

De acuerdo con la ley de Gauss, el flujo a través de cualquier superficie cerrada que envuelva a esta carga será el mismo. Si consideramos superficies esféricas concéntricas de radio cada vez más grande, el área de cada una crece como el cuadrado del radio, pero el flujo no cambia. Por tanto, el campo eléctrico de una carga puntual debe decaer como el cuadrado de la distancia a la carga.



Matemáticamente

$$\mathrm{d}\vec{S} = \vec{u}_r\,\mathrm{d}S \qquad\qquad \frac{q}{\varepsilon_0} = \oint_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \oint_S E(r)\,\mathrm{d}S$$

y puesto que $E(r)$ tiene el mismo valor para todos los puntos de la superficie esférica puede salir de la integral y queda

$$\oint_S E(r)\,\mathrm{d}S = E(r)S = 4\pi r^2 E = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{E} = \frac{q}{4\pi r^2}\vec{u}_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

Una vez que tenemos el campo de una carga puntual situada en el origen de coordenadas podemos obtener el campo para cualquier otro punto sin más que trasladar los vectores

$$\vec{r}\to\vec{r}-\vec{r}_1 \qquad \Rightarrow \qquad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q(\vec{r}-\vec{r}_1)}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3}$$

4 Aplicaciones de la ley de Gauss

La ley de Guauss es siempre cierta, pero no siempre es útil. Nos proporciona el valor de la integral de un campo, pero no el valor del propio campo. Existen muchas funciones diferentes que tienen la misma integral definida. Por ello, en principio, no podemos extraer el campo de la integral y “despejarlo”.

La excepción la dan las situaciones con simetrías. Se dice que una distribución es simétrica cuando efectuando un cambio en la posición no se percibe ningún cambio en la distribución. Así tenemos:

Simetría traslacional

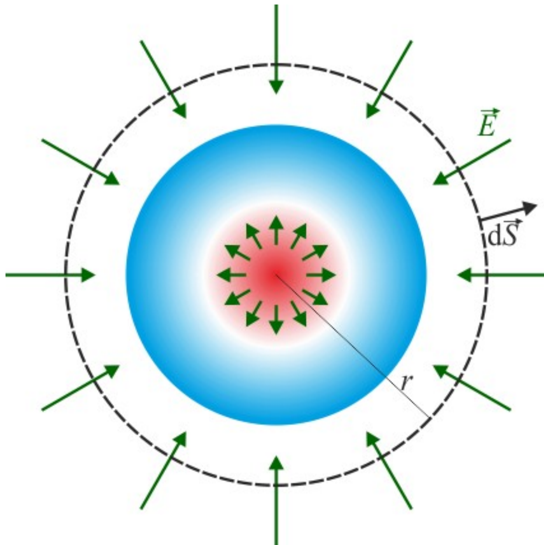
es aquella en que el sistema es invariante ante un desplazamiento rectilíneo. Por ejemplo, imaginemos una línea cargada rectilínea y de longitud infinita (que modelaría un cable, por ejemplo). Si nos movemos paralelamente al cable no vemos ningún cambio. Se dice entonces que hay simetría traslacional. Si en vez de un cable infinito tenemos un segmento de longitud finita ya no es cierto, pues no es lo mismo estar junto a la mitad del cable que junto a un extremo o más allá.

Simetría rotacional
: es aquella en que el sistema es invariante ante una rotación. Siguiendo con el ejemplo del cable, no apreciamos ningún cambio si rotamos en torno a él, manteniéndonos a la misma distancia.

Simetría esférica
: corresponde a que haya simetría rotacional respecto a cualquier dirección. Una esfera cargada uniformemente se ve igual se mire desde donde se mire.

4.1 Simetría esférica

En los casos de simetría esférica, el procedimiento de cálculo del campo eléctrico es el siguiente, desarrollado en un problema



Si la distribución de carga posee simetría esférica o de revolución, de manera que se ve igual desde todas las direcciones, el campo eléctrico que produce va en la dirección radial y depende solo de la distancia al centro de la distribución

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\vec{u}_r$$

Este es el caso, por ejemplo, de una carga puntual. La cantidad $E(r)$ no es el módulo del campo, sino su componente radial, ya que tiene un signo que nos dice si va hacia afuera (caso de una carga positiva) o hacia adentro (caso de una carga negativa).

Hay que remarcar que no todas las distribuciones de carga en una esfera poseen simetría esférica. Por ejemplo, una esfera cargada positivamente en su hemisferio "norte" y negativamente en el "sur" no posee simetría esférica, ya que no todas las direcciones son equivalentes. No se ve lo mismo desde el norte que desde el sur o desde el ecuador.

Suponiendo que sí existe simetría esférica, el flujo del campo eléctrico a través de una superficie esférica puede hallarse explícitamente. Si tomamos una superficie esférica de radio r concéntrica con la distribución, el diferencial de superficie, ortogonal a ésta, va en la dirección radial

$$\mathrm{d}\vec{S} = \mathrm{d}S\,\vec{u}_r$$

Por ello, el flujo se reduce a una integral de un escalar

$$\oint \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \oint (E(r)\vec{u}_r)\cdot(\mathrm{d}S\,\vec{u}_r) = \oint E(r)\mathrm{d}S$$

Ahora bien, dado que la superficie de integración es una esfera, todos sus puntos se encuentran a la misma distancia del centro y por tanto, el valor de la componente radial del campo, $E(r)$, tiene el mismo valor para todos ellos y puede extraerse de la integral

$$\oint E(r)\mathrm{d}S = E(r)\oint \mathrm{d}S = 4\pi r^2 E(r)$$

Hay que recordar que el campo no es el mismo para todos los puntos de la superficie esférica, ya que su dirección y sentido cambian de un punto a otro. Lo que es constante es el valor de su módulo.

Llevando esto a la ley de Gauss nos queda

$$4\pi r^2 E = \frac{Q_{\mathrm{int}}(r)}{\varepsilon_0} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_{\mathrm{int}}(r)}{r^2}\vec{u}_r$$

Por tanto, para los sistemas con simetría esférica (y solo para ellos) el campo para cada distancia del centro equivale al de una carga puntual cuyo valor es igual al de toda la carga contenida en el volumen $r' < r$.

Como ejemplos de sistemas con simetría esférica tenemos:

- Una carga puntual
- Una superficie esférica cargada uniformemente
- Dos superficies esféricas concéntricas
- Una esfera maciza cargada uniformemente

Cuando tenemos un sistema que es una combinación de esferas descentradas, no podemos hacer uso de la ley de Gauss para hallar el campo de la distribución completa de una vez, ya que no hay simetría. Lo que sí se puede hacer es descomponer el sistema en partes, hallar el campo para cada esfera por separado por ley de Gauss y posteriormente aplicar el principio de superposición.

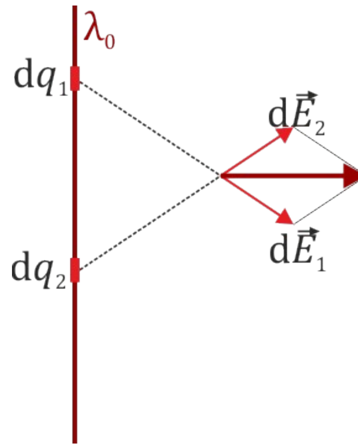
4.2 Simetría traslacional

La simetría traslacional es la que se tiene cuando el sistema no cambia al realizar un desplazamiento cualquiera en una cierta dirección (típicamente de forma paralela al eje Z, que suele tomarse como eje de simetría).

El ejemplo más simple es el de un hilo rectilíneo infinitamente largo, dotado de una densidad lineal uniforme de carga, λ_0. Este modelo sirve para aproximar el campo eléctrico debido a un cable como los de los tendidos de alta tensión.

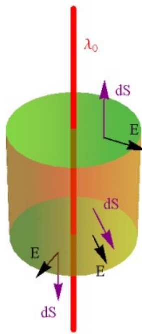
Si situamos el eje OZ sobre el hilo, la simetría implica que el campo no depende de la coordenada z.

Por otro lado, para cualquier punto P del espacio, el campo debido a un elemento del hilo se suma con el de otro elemento situado simétricamente, resultando un campo perpendicular al segmento. Como además hay simetría de revolución, este campo solo puede ser radial.



Empleando coordenadas cilíndricas

$$\vec{E} = E(\rho)\vec{u}_\rho$$



Si ahora aplicamos la ley de Gauss a una superficie cilíndrica de radio ρ y altura *h* concéntrica con el hilo solo hay flujo de campo a través de la cara lateral, siendo su valor

$$\oint \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \int E(\rho)\,\mathrm{d}S = 2\pi\rho h E(\rho)$$

Este flujo es igual a la carga encerrada por el cilindro, dividida por la permitividad del vacío

$$\frac{Q_\mathrm{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda_0 h}{\varepsilon_0}$$

Igualamos y despejamos y queda el campo

$$\vec{E} = \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0\rho}\vec{u}_\rho$$

Este campo es radial y hacia afuera (si la densidad de carga es positiva) y decae con la distancia al hilo como la inversa de ésta (no como la inversa del cuadrado).

Podemos escribirlo en cartesianas observando que

$$\vec{E} = \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{u}_\rho}{\rho} = \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\rho\vec{u}_\rho}{\rho^2} = \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}}{x^2+y^2}\right)$$

Si tenemos más de un hilo, el campo total puede hallarse aplicando el principio de superposición.

Campo eléctrico y ley de Gauss

1 Concepto de electrostática

La electrostática estudia los campos eléctricos y fuerzas debidas a cargas en reposo. Si además es "en el vacío" quiere decir que se consideran las cargas flotando en un espacio vacío. Puesto que más del 99% de la materia es realmente vacío, es un punto de partida adecuado. Los medios materiales (conductores o dieléctricos) pueden añadirse más tarde, como conjunto de cargas en el vacío.

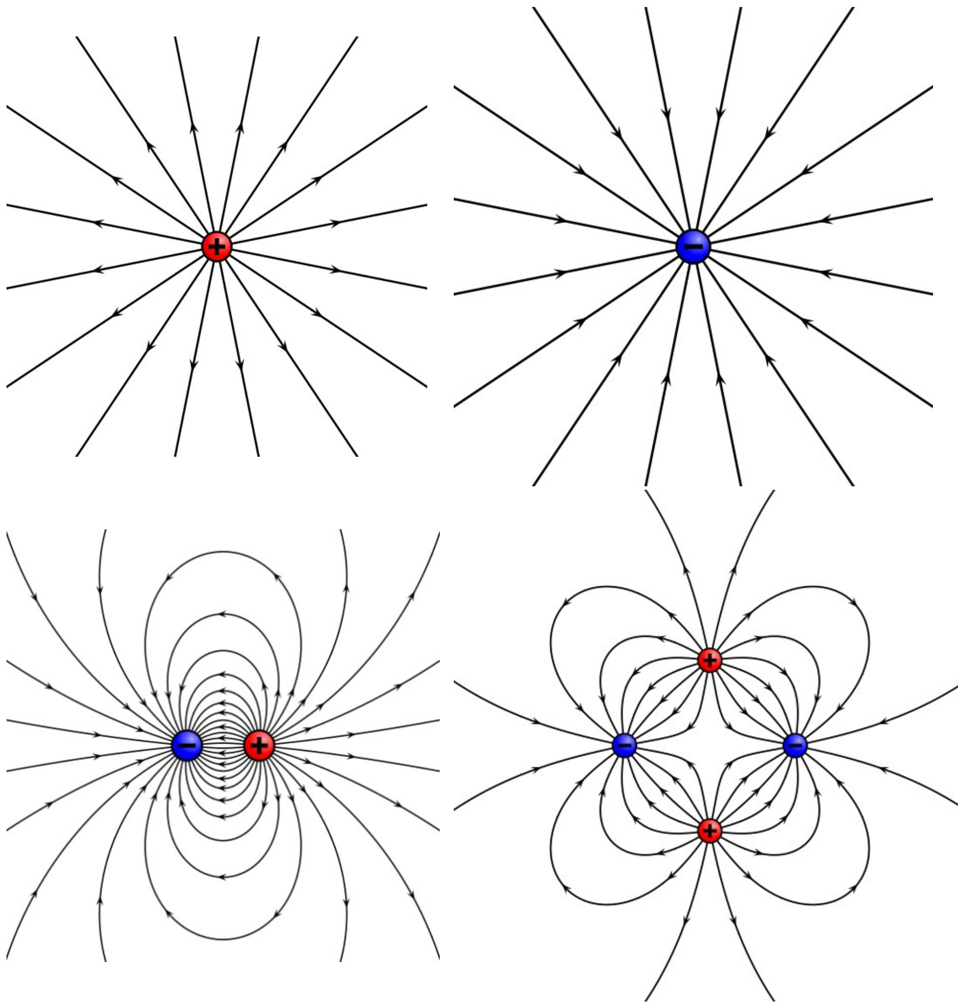
En la electrostática en el vacío, los campos eléctricos son independientes dle tiempo y no hay campos magnéticos presentes. Esto reduce la ley de Lorentz para una carga puntual a solo la fuerza eléctrica

$$\vec{F} = q\vec{E}(\vec{r})$$

y puesto que consideramos cargas en reposo suponemos que esta fuerza se encuentra compensada por alguna otra, de forma que la resultante es nula.

2 Campo eléctrico

Entendemos el campo eléctrostático como una perturbación en el espacio producida por la presencia de cargas eléctricas en reposo



(ilustraciones obra de Geek3 para Wikipedia).

El campo es un concepto primario. No se puede describir qué es el campo eléctrico, sino solo qué efectos produce sobre otras cargas.

Puede definirse de una manera operativa, esto es, dando un procedimiento para su medida. Para ello se considera una carga muy pequeña q_0 y se sitúa en un campo eléctrico. Con la medida de un dinamómetro se mide la fuerza sobre ella. Se define el campo eléctrico en la posición de la carga como

$$\vec{E}(\vec{r}) = \lim_{q_0\to 0} \frac{\vec{F}}{q_0}$$

El límite se toma porque idealmente se considera que la carga que se coloca no debe afectar a lo que ya había, para lo cual debe ser lo más pequeña posible.

3 Líneas de campo eléctrico

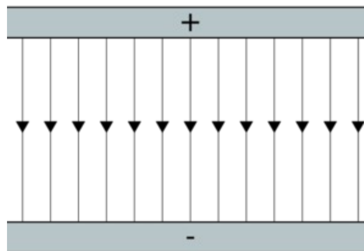
Como con cualquier otro campo, se pueden trazar las líneas de campo eléctrico, como aquellas curvas que son tangentes al campo eléctrico en cada punto. Estas curvas son soluciones de la ecuación diferencial

$$\mathrm{d}\vec{r} = \vec{E}(\vec{r})\,\mathrm{d}\theta \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}\theta} = \vec{E}(\vec{r})$$

siendo θ un parámetro que nos permite etiquetar los puntos de cada curva. Estas ecuaciones diferenciales suelen ser extremadamente complejas y no poseen soluciones analíticas salvo en los casos más triviales, por lo que su solución requiere el uso de ordenadores, como en el caso de las cuatro cargas representado más arriba.

Existe casos particulares importantes:

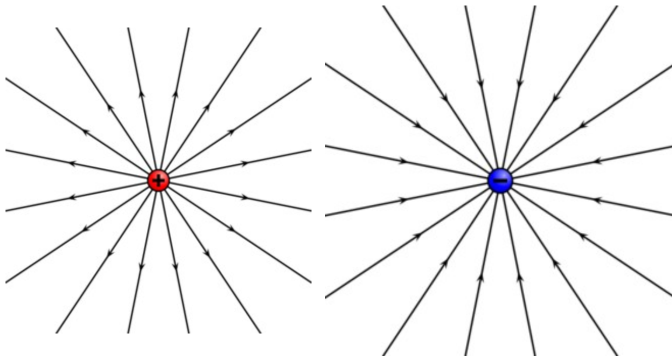
- Un campo uniforme (independiente de la posición) tiene líneas de campo que son rectas paralelas. Este es el caso del campo eléctrico en el interior de un condensador plano.



- Un campo central

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\vec{u}_r \qquad\qquad \text{(campo central)}$$

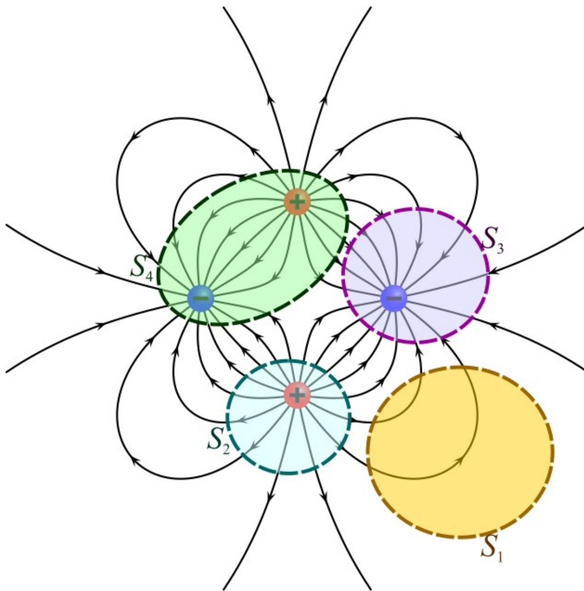
en el cual el campo es siempre puramente radial, las líneas de campo son semirrectas radiales. Este es el caso del campo de una carga puntual, positiva o negativa,



4 Ley de Gauss

Una propiedad del campo eléctrico que se desprende del trazado de sus líneas de campo es la siguiente.

Consideremos, por ejemplo, el caso de cuatro cargas ilustrado anteriormente



- Si tomamos la superficie cerrada S_1, vemos que no encierra carga alguna, y que en ella hay tantas líneas de campo que entran como las que salen.
- En la superficie S_2, que envuelve a la carga positiva, las líneas de campo atraviesan la superficie hacia el exterior. Se dice que en esta región el campo es divergente.
- En S_3, en cambio, se envuelve una carga negativa y en ella el campo es convergente, atravesando las líneas de campo la superficie hacia adentro.

- En S_4 se envuelve una carga neta 0, y vemos que en ella también hay tantas líneas que entran como que salen.

Vemos que el hecho de que las líneas atraviesen la superficie hacia afuera o hacia adentro depende de las cargas que haya en el interior, y que si es nula (bien porque no hay nada, bien porque hay tantas positivas como negativas) hay tantas que entran como que salen.

Este es un resultado general. Matemáticamente se expresa con el concepto de flujo que es una medida de cuánto campo atraviesa una superficie. La ley física que describe este fenómeno es la ley de Gauss

> **Ley de Gauss:** El flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada es proporcional a la cantidad de carga encerrada por la superficie.

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q_{\mathrm{int}}}{\varepsilon_0}$$

Analizando cada uno de los términos de esta ecuación tenemos:

$\oint_S$
: El símbolo de integral con un círculo representa la integración sobre una superficie cerrada.

$\vec{E}$
: El campo eléctrico en los puntos de la superficie. Este campo será en general función de la posición, por lo que no puede extraerse de la integral.

$\cdot$
: El campo eléctrico es un vector y el diferencial de superficie también lo es. El flujo en cambio, es un número con signo. El producto escalar nos garantiza el carácter escalar del resultado.

$\mathrm{d}\vec{S}$: Cuando se integra sobre una superficie, se divide ésta en elementos de área $\mathrm{d}S$. Se define el vector diferencial de superficie como uno que tiene por módulo el área del elemento, por dirección la perpendicular a la superficie y por sentido el que va hacia el exterior

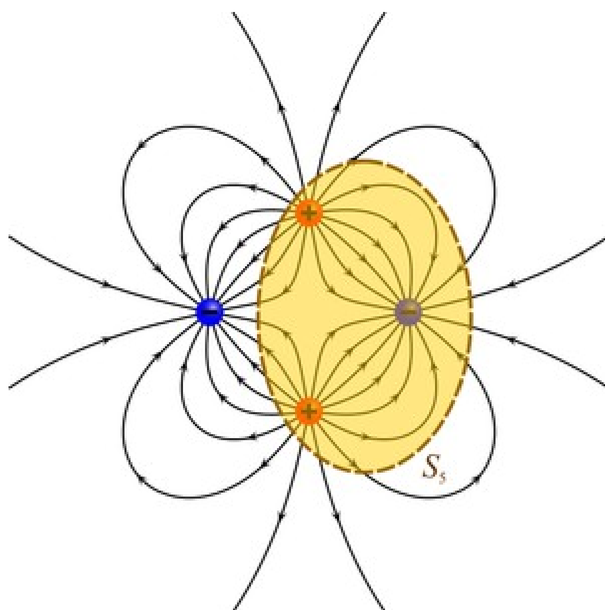
$$\mathrm{d}\vec{S} = \vec{n}\,\mathrm{d}S$$

(¡ojo a la diferencia entre $\mathrm{d}S$y $\mathrm{d}\vec{S}$!).

Q_{int}
: es la carga encerrada por la superficie. Ojo que no es toda la carga del sistema. Puede haber cargas en el exterior, que producen campo en la superficie (por ejemplo, las cuatro cargas

respecto de la S_1 anterior), pero que no están encerradas por ella. Aquí:

- Si la carga neta encerrada es positiva: El flujo neto es hacia el exterior y el campo es divergente (caso de la superficie S_2). Esto no excluye que pueda contener cargas negativas y que haya algunas líneas de campo hacia adentro, como en la superficie S_5.



- Si la carga neta encerrada es negativa: El flujo neto es hacia el interior y el campo es convergente (caso de S_3).
- Si la carga neta encerrada es cero: El flujo es nulo y hay tanto campo quye entra como que sale. Es importante recordar que un flujo nulo no implica un campo nulo

$$\oint_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = 0 \qquad \not\Rightarrow \qquad \vec{E} = \vec{0}$$

ε_0

La constante de proporcionalidad es una constante universal denominada *permitividad del vacío*, que tiene un valor exacto

$$\varepsilon_0 = \frac{10^7}{35950207149472 7056\pi}\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2} \simeq 8.854\times 10^{-12}\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2} = 8.854\,\frac{\mathrm{pF}}{\mathrm{m}}$$

Aunque se suele aproximar en la forma más sencilla

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = k_e \simeq 9\times 10^9\frac{\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2}{\mathrm{C}^2}$$

5 Campo de cargas puntuales

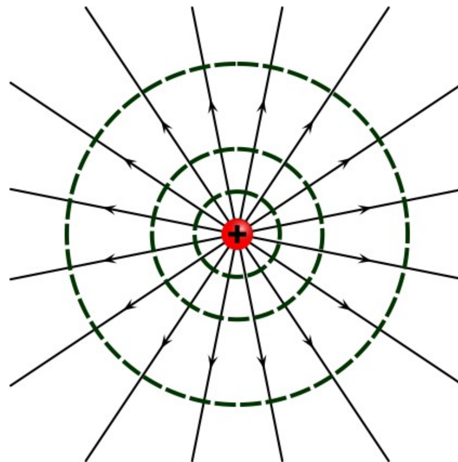
Una de las primeras aplicaciones de la ley de Gauss es la obtención del campo eléctrico creado por una carga puntual.

Por la simetría del sistema, el campo creado por una carga va a ser central

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\vec{u}_r$$

siendo r la distancia a la carga, $\vec{r}$ el vector de posición respecto a la carga y $\vec{u}_r$ el unitario en la dirección radial.

De acuerdo con la ley de Gauss, el flujo a través de cualquier superficie cerrada que envuelva a esta carga será el mismo. Si consideramos superficies esféricas concéntricas de radio cada vez más grande, el área de cada una crece como el cuadrado del radio, pero el flujo no cambia. Por tanto, el campo eléctrico de una carga puntual debe decaer como el cuadrado de la distancia a la carga.



Matemáticamente

$$\mathrm{d}\vec{S} = \vec{u}_r\,\mathrm{d}S \qquad\qquad \frac{q}{\varepsilon_0} = \oint_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \oint_S E(r)\,\mathrm{d}S$$

y puesto que $E(r)$ tiene el mismo valor para todos los puntos de la superficie esférica puede salir de la integral y queda

$$\oint_S E(r)\,\mathrm{d}S = E(r)S = 4\pi r^2 E = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{E} = \frac{q}{4\pi r^2}\vec{u}_r$$

Más en general, si tenemos la carga en un cierto punto A, el campo que produce en un punto P es

$$\vec{E}_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{d_{AP}^2}\vec{u}_{AP}$$

En función de los vectores de posición

$$d_{AP} = |\vec{r}_P - \vec{r}_A| \qquad \vec{u}_{AP} = \frac{(\vec{r}_P - \vec{r}_A)}{|\vec{r}_P - \vec{r}_A|} \qquad \vec{E}_P = \frac{q(\vec{r}_P - \vec{r}_a)}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}_P - \vec{r}_A|^3}$$

El campo eléctrico de una carga puntual tiene dirección radial desde la carga y un sentido que depende del signo de ésta. Hacia afuera si es positiva y hacia adentro si es negativa.

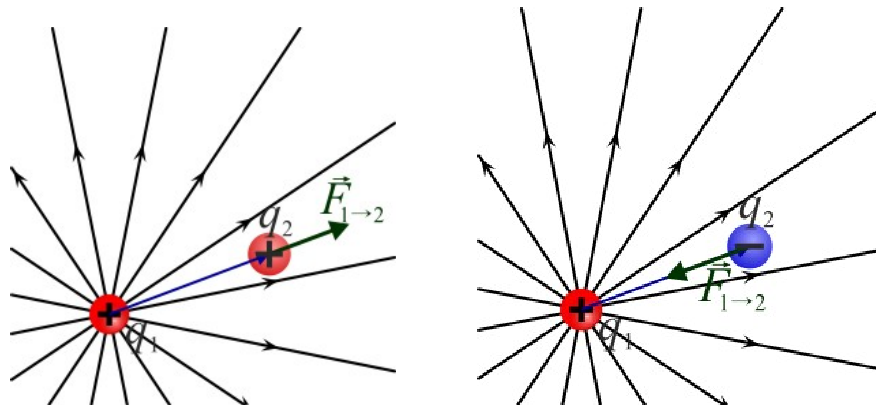
5.1 Ley de Coulomb

Una vez que tenemos el campo eléctrico creado por una carga puntual podemos calcular la fuerza que produce sobre otra carga. Si tenemos una carga q_1 en $\vec{r}_1$y situamos una carga q_2 en el punto $\vec{r}_2$, la fuerza que experimenta es el producto de la carga por el campo en la posición que se encuentra

$$\vec{F}_{1\to 2} = q_2\vec{E}_1(\vec{r}_2) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q_2 q_1 \vec{u}_{12}}{d_{12}^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q_2 q_1(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}$$

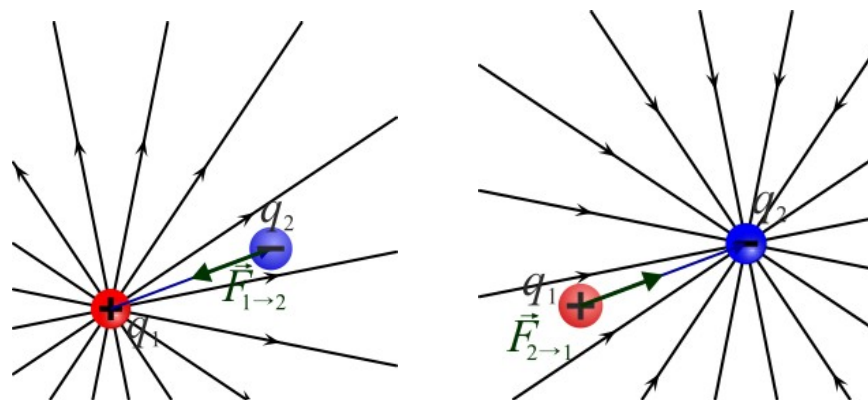
siendo $\vec{u}_{12}$el vector unitario en la dirección de la recta que pasa por las dos cargas y en el sentido de la carga 1 a la 2. Esta es la conocida como *ley de Coulomb* para fuerzas entre cargas puntuales.

Dado que la fuerza es proporcional a la carga q_2, si tenemos una carga q_1 positiva, la fuerza sobre q_2 será de repulsión si q_2 es positiva y de atracción si es negativa, aunque en los dos casos el campo de q_1 vaya hacia afuera.



La fuerza que experimenta la carga 1 se debe a que percibe el campo de la carga 2

$$\vec{F}_{2\to 1} = q_1\vec{E}_2(\vec{r}_1) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2 \vec{u}_{21}}{d_{21}^2}$$



Puesto que el producto de cargas es conmutativo, la distancia es la misma en los dos casos y el vector unitario tiene la misma dirección, pero sentido opuesto al anterior, se llega a que la ley de Coulomb cumple la tercera ley de Newton

$$\vec{F}_{1\to 2} = -\vec{F}_{2\to 1}$$

Asimismo obtenemos las propiedades:

- Cargas del mismo signo se repelen y cargas de signo opuesto se atraen.
- La fuerza entre cargas puntuales en reposo es proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas.

La magnitud de la fuerza eléctrica es muy grande comparada con otras fuerzas de la naturaleza. Así, por ejemplo, para la fuerza entre un protón y un electrón (cargas $\pm e$) situados a una distancia d tenemos

$$F_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{d^2}$$

La fuerza gravitatoria entre las dos partículas vale en módulo, de acuerdo con la ley de Gravitación Universal

$$F_g = G\frac{m_p m_e}{d^2}$$

La proporción entre las dos fuerzas es independiente de la distancia entre las partículas

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 G m_p m_p}$$

Sustituyendo los valores de las cargas y masas del protón y del electrón y constantes queda

$$\frac{F_e}{F_g} = 2.27\times 10^{39} = 2\,270\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000$$

Además, al ser esta proporción independiente de la distancia, quiere decir que la fuerza eléctrica entre un protón situado en la Tierra y un electrón situado en la Luna, tiene esta misma proporción respecto a la fuerza gravitatoria entre ellas. Podemos preguntarnos entonces, ¿por qué apreciamos entonces la fuerza gravitatoria? Es más ¿por qué los planetas y galaxias se mueven por fuerzas gravitatorias y no eléctricas?

La explicación está en el hecho de que hay dos signos de carga, pero solo una de masa. Esto quiere decir que el efecto de la gravedad es siempre acumulativo, cuanta más masa se reúne, mayor es la fuerza gravitatoria. Las cargas, en cambio, se cancelan mutuamente. La materia es esencialmente neutra, ya que hay tantas cargas positivas como negativas, por lo que la fuerza eléctrica sobre un objeto distante es prácticamente nula.

Para justificar esto, no obstante, debemos considerar el efecto de un conjunto de cargas.

6 Principio de superposición

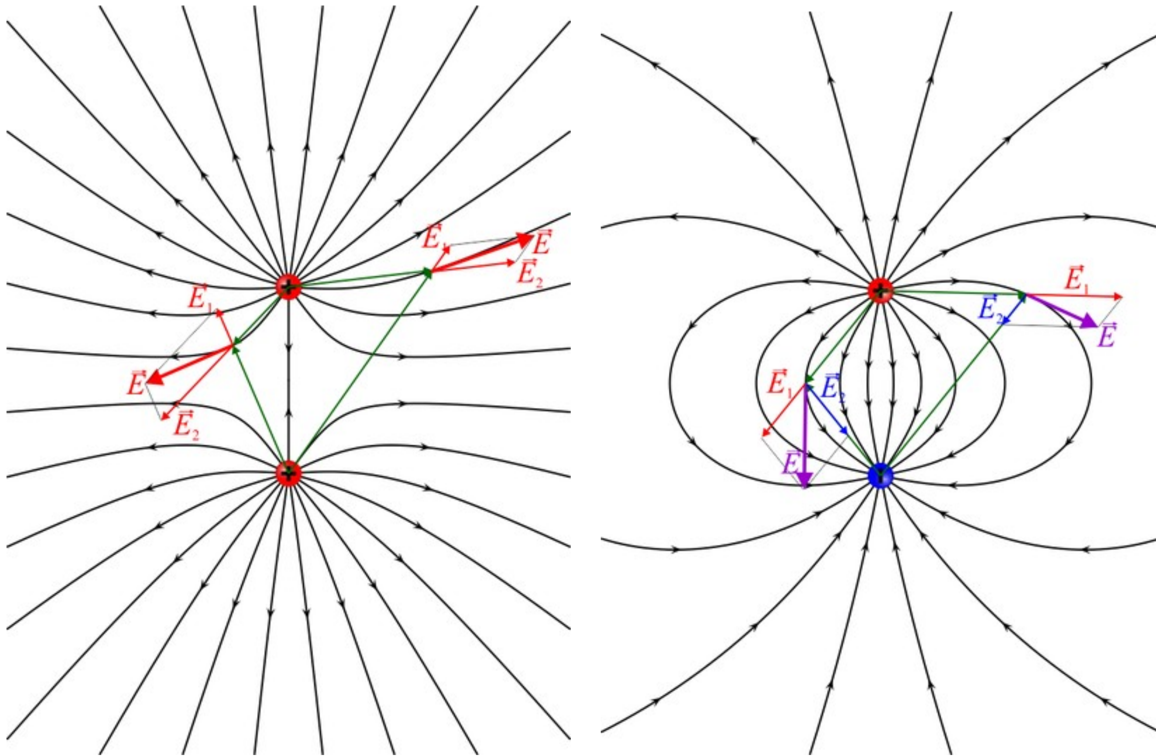
Cuando tenemos más de una carga puntual, la ley de Gauss no es suficiente para determinar el campo eléctrico, ya que no se cumple que el campo sea radial o que dependa solo de la distancia a la carga, al haber más de una. Necesitamos una ley adicional.

Esta ley adicional es el *principio de superposición de los campos*, que establece que

> *El campo de un conjunto de cargas es igual a la suma vectorial de los campos individuales, calculados como si las demás cargas no estuvieran presentes.*

es decir, que podemos emplear las expresiones anteriores para los campos de cada una de las cargas y sumarlas vectorialmente en cada punto. La coletilla "como si las demás cargas no estuvieran presentes", se refiere a que en principio, si tenemos una carga ya situada, e introducimos una adicional, la segunda podría influir en el campo de la primera, pero no lo hace.

Así, si tenemos dos cargas iguales positivas, el campo en cada punto es la suma de dos campos radiales hacia afuera respecto de cada carga. El resultado es un campo hacia el exterior del sistema, pero ya no radial. En particular, en el punto medio entre las dos cargas, los dos campos se cancelan y el campo total es nulo.



Si tenemos dos cargas iguales y opuestas, lo que se conoce como un dipolo, el campo en cada punto es suma vectorial de uno que se aleja de la carga positiva y uno que se acerca a la negativa. Las líneas de campo, en este caso, son curvas que nacen en la carga positiva y mueren en la negativa.

Matemáticamente, la suma del campo de las dos cargas sería, para cada punto

$$\vec{E}_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{d_{1P}^2}\vec{u}_{1P} + \frac{q_2}{d_{2P}^2}\vec{u}_{2P}\right)$$

o empleando las posiciones de las dos cargas y del punto donde deseamos hallar el campo

$$\vec{E})\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1(\vec{r}-\vec{r}_1)}{|\vec{r}-\vec{r}_1|^3} + \frac{q_2(\vec{r}-\vec{r}_2)}{|\vec{r}-\vec{r}_2|^3}\right)$$

El principio de superposición es válido también para las fuerzas eléctricas. La fuerza sobre una tercera carga puesta en el sistema será la resultante de las fuerzas producidas cpor cada una de las cargas, como si la otra no estuviera presente.

7 Campo de una distribución de carga

7.1 De cargas puntuales

El principio de superposición se extiende a cualquier número de cargas. Si tenemos N cargas puntuales, situadas en los puntos $\vec{r_i}$, el campo en cualquier punto vale

$$\vec{E}_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{d_{iP}^2}\vec{u}_{iP}$$

o, usando las posiciones de cada una

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i(\vec{r}-\vec{r}_i)}{|\vec{r}-\vec{r}_i|^3}$$

7.2 De una distribución continua.

Al considerar un medio material, se hace imposible conocer la posición de cada una de los trillones de cargas que lo componen.

Por ello, se debe trabajar con densidades de carga. Dividimos el volumen del material en elementos microscópicos (pero que contienen millones de cargas), de forma que la carga de cada elemento es dq. Entonces, el campo en un punto P es la generalización de la suma anterior a una integral

$$\vec{E}_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\mathrm{d}q}{d_{qP}^2}\vec{u}_{qP}$$

siendo d_{qP} la distancia desde cada elemento de carga al punto donde queremos hallar el campo y $\vec{u}_{qP}$el unitario en la dirección desde el elemento de carga al punto en cuestión.

Dependiendo del tipo de carga que tengamos, el tipo de integral variará.

- Volumétrica: Si la carga está repartida en un volumen

$$dq = \rho\, dv \qquad \vec{E}_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho\, dv}{d_{qP}^2}\vec{u}_{qP}$$

donde ρ será en general una función de la posición, que habrá que integrar.

- Superficial: Si la carga está distribuida sobre una superficie

$$dq = \sigma_s\, dS \qquad \vec{E}_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\sigma_s\, dS}{d_{qP}^2}\vec{u}_{qP}$$

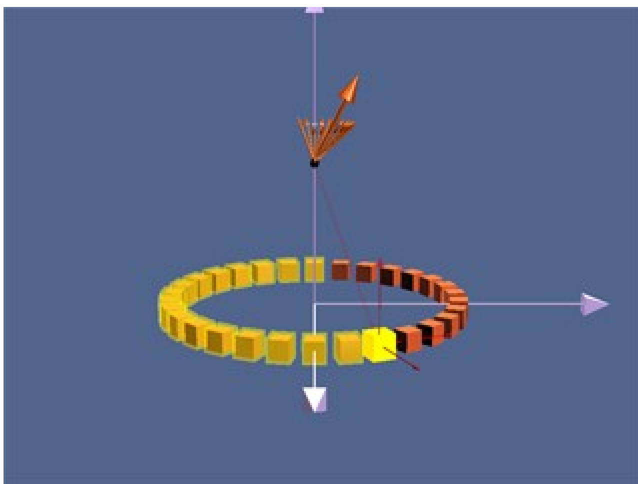
  Obsérvese que, a diferencia del flujo, aquí el diferencial de superficie es escalar, e igual al área del elemento.

- Lineal: Si la carga está repartida a lo largo de una línea

$$dq = \lambda\, dl \qquad \vec{E}_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_L \frac{\lambda\, dl}{d_{qP}^2}\vec{u}_{qP}$$

- Caso general: En un problema general podemos tener todos los tipos de densidades simultáneamente y además cargas puntuales aisladas. El campo en cada punto será la superposición de los campos individuales

$$\vec{E}_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho\, dv}{d_{qP}^2}\vec{u}_{qP} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\sigma_s\, dS}{d_{qP}^2}\vec{u}_{qP} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_L \frac{\lambda\, dl}{d_{qP}^2}\vec{u}_{qP} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{d_{iP}^2}\vec{u}_{iP}$$



En casi todos los casos estas integrales son imposibles de hallar analíticamente. Sin embargo, se prestan a un cálculo numérico sencillo de implementar en un ordenador: se divide la distribución en un

número grande de elementos, se calcula la contribución de cada uno al campo y se halla la suma de todos ellos, como si fuera un conjunto de cargas puntuales. Existen diferentes mejoras a este método, que aumentan la precisión o la velocidad del cálculo.

7.3 Densidades uniformes

En muchos problemas prácticos se dice "una carga Q distribuida uniformemente en el volumen" o "un anillo cargado uniformemente con carga Q" o similar. En estos casos se nos está dando el tipo de distribución (si es de volumen, lineal, etc.), el valor de la carga total, y se nos dice que la carga tiene una densidad uniforme, es decir, que es la misma para todos los puntos. En esos casos, lo primero es determinar la densidad correspondiente, y luego recurrir a las expresiones anteriores.

Por ejemplo, si se nos pide hallar el campo en los puntos del eje de un anillo de radio R con una carga Q distribuida uniformemente, tenemos que el anillo tiene una densidad lineal de carga λ, tal que

$$Q = \int_L \lambda \, \mathrm{d}l$$

Ahora bien, por ser la densidad uniforme, puede salir de la integral

$$Q = \lambda \int_L \mathrm{d}l = \lambda \, L = 2\pi R \, \lambda$$

lo que nos da la densidad

$$\lambda = \frac{Q}{L} = \frac{Q}{2\pi R}$$

y, para la expresión del campo nos queda

$$\vec{E}_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_L \frac{\lambda \, \mathrm{d}l}{d_{qP}^2} \vec{u}_{qP} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{Q}{2\pi R} \right) \int_L \frac{\mathrm{d}l}{d_{qP}^2} \vec{u}_{qP}$$

Análogamente si tenemos el caso de una carga distribuida uniformemente en una superficie esférica

$$\sigma_s = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

o en un volumen esférico

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{3Q}{4\pi R^3}$$

Potencial y energía electrostática

1 Trabajo y energía potencial

1.1 Trabajo para mover una carga eléctrica

Supongamos que tenemos una carga positiva “1” en una posición fija del espacio, y deseamos acercar otra carga positiva “2” desde un punto A a un punto B más próximo a la primera. Para hacerlo debemos vencer la repulsión eléctrica ejercida por la primera, aplicando una fuerza externa.

Por tanto, para acercar la carga debemos realizar un trabajo

$$W_{\mathrm{in}} = \int_A^B \vec{F}_{\mathrm{ext}} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

De acuerdo con el primer principio de la termodinámica, este trabajo realizado sobre el sistema, o bien se almacena como un aumento de la energía total, o bien sale en forma de calor (o una parte de cada cosa)

$$W_{\mathrm{in}} = \Delta E + Q_{\mathrm{out}}$$

Si el proceso es cuasiestático, moviendo la carga 2 de forma extremadamente lenta, este trabajo se almacena en forma de energía potencial (que es parte de la energía total). Podemos verlo con el siguiente experimento mental: si una vez en la posición final B, sujetamos la carga 2 con una chincheta y esperamos un cierto tiempo, tras el cual la liberamos, la carga 2 sale disparada por la repulsión de la

1. Al hacerlo, gana energía cinética, ¿de dónde sale esta energía? No vale decir que se la da la carga 1 por su fuerza eléctrica, pues la energía se conserva y la carga 1 no pierde nada. Concluimos entonces, que la carga 2 ya tenía esa energía “guardada” en forma de energía potencial por el hecho de estar en presencia de la 1.

Usando la analogía mecánica, sería equivalente a comprimir un muelle (invisible), realizando para ello una fuerza en contra de la elástica. Se sujeta el muelle con un tope y pasado un tiempo, se retira éste. El muelle se estira empujando la masa, que se acelera. Podemos decir que la energía cinética que gana procede de la energía potencial elástica que tenía por estar el muelle comprimido.

Este razonamiento es generalizable al movimiento de una carga en un campo eléctrico cualquiera (no necesariamente el de una sola carga, sino el de una distribución). Al mover la carga debemos realizar un trabajo, que queda guardado como energía potencial electrostática.

1.2 Energía potencial electrostática

Para hallar una expresión para la energía potencial suponemos que movemos una carga el seno de un campo eléctrico de manera cuasiestática. Para ello debemos ejercer una fuerza que supere a la eléctrica, pero solo ligeramente (pues la partícula no se llega a acelerar)

$$\vec{F}_{\text{ext}} + \vec{F}_e = \overbrace{m\vec{a}}^{=\vec{0}} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{F}_{\text{ext}} = -\vec{F}_e = -q\vec{E}$$

por lo que el trabajo realizado es

$$W_{\text{in}} = -\int_A^B q\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

En principio, esta integral depende del camino que se recorra. Sin embargo, para el caso del campo de una carga puntual es fácil demostrar (como veremos) que solo depende de la distancia inicial y final a la carga que crea el campo. Puesto que todo campo electrostático es suma de campos de cargas puntuales, se llega a que para cualquier campo electrostático, la integral es independiente del camino y equivale al incremento de una energía potencial

$$\Delta U_\mathrm{e} = U_\mathrm{e}(B) - U_\mathrm{e}(A) = -\int_A^B q\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

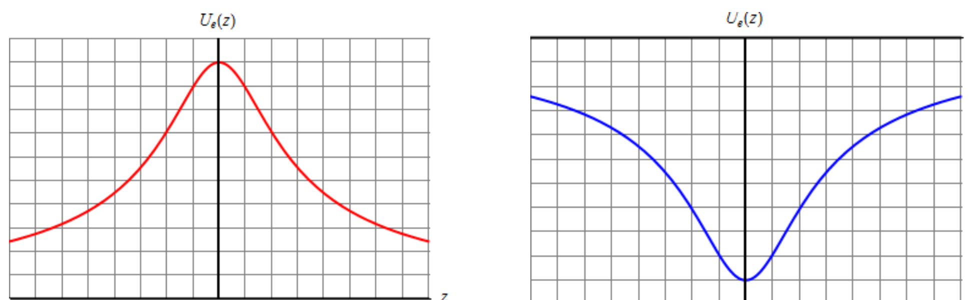
Definimos entonces la energía potencial de una carga puntual en un campo eléctrico como la integral

$$U_\mathrm{e}(A) = -q\int_O^A \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

siendo O un punto de referencia al cual se le asigna energía potencial 0. Para campos debidos a distribuciones localizadas de carga se suele tomar el infinito como referencia. En problemas concretos se puede elegir otro punto que sea más conveniente. Es importante, a la hora de resolver un problema que, una vez elegido el punto de referencia, este no se cambie.

La energía potencial electrostática puede ser tanto positiva como negativa, y su incremento puede tener también los dos signos.

- Si acercamos una carga positiva a otra carga positiva (o en general a un campo que la repele) debemos hacer un trabajo positivo y la energía potencial aumenta.
- Si en el mismo campo anterior la carga que acercamos es negativa, resulta un trabajo negativo y una disminución de la energía potencial. ¿Cómo se explica esto físicamente? En este caso, el campo atrae a la carga, por lo que la fuerza que debemos hacer es para retenerla e impedir que se acelere. Esto nos permite extraer energía de la carga (que disipamos por rozamiento, o guardamos en algún tipo de acumulador, como puede ser un resorte o un tubo de aire comprimido).



Las gráficas representan la energía potencial de una carga en el campo eléctrico de un anillo. La curva en forma de montaña corresponde a que la carga y el anillo tengan el mismo signo, y la curva en forma de valle a que tengan signo opuesto.

Una vez establecida la curva de energía potencial, puede aplicarse todo el análisis visto en Mecánica, de curvas de potencial estudiando los casos de equilibrio estable o inestable, los puntos de retorno, movimiento oscilatorio, etc.

2 Potencial eléctrico

2.1 Definición

La energía potencial electrostática depende no solo del campo eléctrico, sino también del valor de la carga que situamos en él. Para un mismo campo eléctrico, una carga q almacena una cierta energía, y una $2q$ almacenará el doble, y una $-q$ tendrá una energía del signo opuesto. Nos preguntamos entonces cómo podemos definir una cantidad similar a la energía potencial, pero que dependa solo del campo existente, y no de la carga que situamos.

Puesto que la energía potencial electrostática de una carga es proporcional al valor de ésta, podemos definir el *potencial eléctrico* en el punto A, de manera análoga a como se define el campo eléctrico, como

$$V(A) = \lim_{q_0\to 0}\frac{U_\mathrm{e}(A)}{q_0}$$

es decir, el potencial eléctrico representa la energía potencial por unidad de carga. Se mide en J/C y a esta unidad se la denomina voltio (V).

Sustituyendo la expresión de la energía potencial queda la expresión alternativa, y más frecuente,

$$V(A) = -\int_O^A \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

siendo $\vec{E}$ el campo eléctrico existente (sin incluir el de la carga que movemos). El punto O es el *origen de potencial*, para el cual se considera que el potencial eléctrico es nulo. El origen de potencial se denomina normalmente “tierra” (porque normalmente el suelo funciona como referencia de potencial) y decir que un conductor “está a tierra” equivale a decir que su potencial es cero (también se dice “está a masa”).

De esta relación entre campo y potencial se deduce que el campo eléctrico también se puede medir en V/m (que de hecho es su unidad más habitual) siendo 1 V/m = 1 N/C.

El potencial eléctrico respecto a la energía potencial electrostática viene a ser análogo a la altura respecto a la gravitatoria. La energía potencial gravitatoria depende de la masa que subamos, pero la altura es independiente de ella. El origen de potencial sería el nivel que tomemos como referencia (el suelo, por ejemplo). En esta analogía, cuando se ve que la corriente eléctrica fluye de más a menos potencial, sería análogo a decir que el agua por una tubería va “cuesta abajo” y una fuente de tensión que sube el potencial de una carga equivaldría a una bomba que eleva el agua hasta una cierta altura.

Al potencial eléctrico se lo denomina también *voltaje* y *tensión*.

El potencial eléctrico es un campo escalar que asigna un número (con un signo y una unidad) a cada punto del espacio.

La ventaja de trabajar con el potencial en lugar de con el campo es que este último es una magnitud vectorial y requiere manejar tres componentes, frente a una del potencial. Conocido el potencial eléctrico puede hallarse el campo eléctrico mediante el gradiente

$$\vec{E} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{\imath} - \frac{\partial V}{\partial y}\vec{\jmath} - \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}$$

El signo negativo que aparece tanto en la definición integral como en el gradiente implica que:

> *El campo electrostático va siempre en el sentido de mayor a menor potencial eléctrico*

2.2 Superficies equipotenciales

Una de las formas de visualizar el potencial eléctrico es mediante las superficies equipotenciales, que son aquellas formadas por los puntos que tienen el mismo potencial. Vienen a ser equivalentes a las curvas de nivel en un mapa topográfico o las isobaras en un mapa del tiempo (pero en 3 dimensiones). Puesto que el potencial eléctrico tiene un solo

valor en cada punto del espacio, se deduce que las superficies equipotenciales no pueden cortarse entre sí.

De la relación entre el potencial y el campo eléctrico se demuestra que éste es siempre ortogonal a las superficies equipotenciales.

2.3 Diferencia de potencial

En muchas situaciones no estamos interesados tanto en el valor del potencial, sino en cuanto cambia de un punto a otro. Esto se mide con la *diferencia de potencial* (d.d.p.)

$$V(B) - V(A) = -\int_A^B \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

o, intercambiando los subíndices

$$V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

Esta integral es independiente del camino que se elija para ir de A a B (aunque alguno hay que elegir). Se denomina también *caída de tensión*.

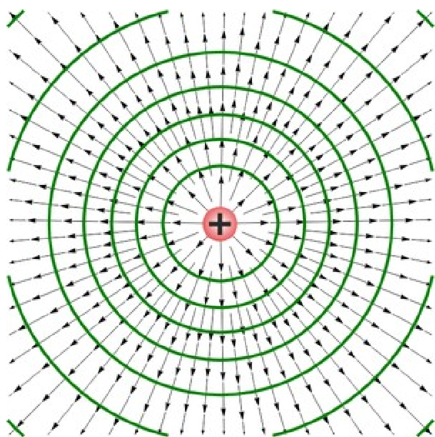
La diferencia de potencial se mide en voltios, como el propio potencial eléctrico.

La diferencia de potencial se relaciona directamente con el trabajo para mover una carga puntual, ya que

$$W_{A\to B} = U_\mathrm{e}(B) - U_\mathrm{e}(A) = qV(B) - qV(A) = q\,\Delta V$$

es decir, el trabajo para mover una carga entre dos puntos en un campo externo es igual al producto de la carga por la diferencia de potencial entre los puntos. Si la carga es positiva, es necesario realizar un trabajo positivo para subir su potencial (su “altura”) y negativo para bajarlo. Al contrario, si la carga es negativa.

2.4 Potencial de una carga puntual



A partir del campo eléctrico de una carga puntual situada en el origen de coordenadas

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u}_r$$

Podemos hallar el potencial eléctrico considerando el origen de potencial en el infinito. Integrando a lo largo de un camino rectilíneo radial

$$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}r\,\vec{u}_r$$

y queda, para un punto situada a una distancia *r* de la carga

$$V(r) = -\int_\infty^r \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\mathrm{d}r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Las superficies equipotenciales en este caso son esferas concéntricas, que por supuesto son ortogonales al campo eléctrico, que es puramente radial.

Si lo que se conoce es el potencial, el campo eléctrico puede determinarse calculando su gradiente

$$\vec{E} = -\nabla\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\right) = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{1}{r}\right)\vec{u}_r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$$

Más en general, para una carga situada en un punto arbitrario, el potencial será la cantidad escalar

$$V(P) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}_P - \vec{r}_q|} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d(q,P)}$$

donde

$$d(q,P) = |\vec{r}_P - \vec{r}_q|$$

es la distancia entre la carga y el punto donde queremos hallar el potencial.

Del mismo modo, la diferencia de potencial depende solamente de las distancias inicial y final a la carga

$$V(B) - V(A) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|\overrightarrow{OB}|} - \frac{1}{|\overrightarrow{OA}|}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|\vec{r}_B - \vec{r}_q|} - \frac{1}{|\vec{r}_A - \vec{r}_q|}\right)$$

2.5 Existencia del potencial electrostático

La existencia de este potencial eléctrico permite establecer el potencial para cualquier distribución electrostática de cargas, ya que, por el principio de superposición, el campo debido a una distribución se puede escribir como suma de los campos de cargas puntuales

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i = \sum_i (-\nabla V_i) = -\nabla\left(\sum_i V_i\right) = -\nabla V$$

Por tanto, el potencial debido a una distribución de cargas puntuales, tomando para todas ellas el origen de potencial en el infinito será

$$V = \sum_i V_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

2.6 Potencial debido a una distribución de cargas

En el caso de una distribución continua el potencial puede calcularse por integración directa de los potenciales debidos a los elementos de carga

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_Q \frac{\mathrm{d}q'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

siendo el diferencial de carga igual a $\rho\,\mathrm{d}v'$, $\sigma_s\,\mathrm{d}S'$ o $\lambda\,\mathrm{d}l'$ según el tipo de distribución de que se trate. La integral se extiende a todos los puntos del espacio en que hay densidad de carga aunque puede

extenderse sin problemas a todo el espacio sin más que hacer nula la densidad de carga en los puntos en que no hay cargas presentes.

Es importante la distinción entre los dos vectores de posición:

- $\vec{r}$ (sin prima) es la posición del punto donde queremos hallar el potencial eléctrico.
- $\vec{r}'$ (con prima) es la posición del punto donde se encuentra un elemento de carga.

La integral se hace sobre las variables con prima, ya que sumamos para todos los elementos de carga. La variable sin prima es un punto concreto del espacio y como tal funciona como una constante respecto a la integral. El resultado es una función de $\vec{r}$.

Por tanto, disponemos de dos formas alternativas para determinar el potencial eléctrico:

- Integrando el campo eléctrico siguiendo un cierto camino desde el origen de potencial.

$$V(\vec{r}_P) = -\int_O^P \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

- Por integración directa a partir de la densidad de carga.

$$V(\vec{r}_P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}')\,\mathrm{d}v'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

Existe un tercer camino, que de hecho es más usado, consistente en resolver la ecuación diferencial de Poisson, cuyo nivel se escapa a este curso.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Si lo que se desea es determinar el campo eléctrico a partir del potencial, el camino a emplear es el segundo.

Así, por ejemplo, el potencial en el centro de una esfera cargada uniformemente en su superficie puede hallarse a partir del campo o por integración directa. Sin embargo, no siempre los dos métodos son

sencillos de aplicar. La integración directa implica habitualmente cálculos tan complicados que requieren el uso de ordenadores. La integración a partir del campo requiere que conozcamos previamente éste, lo cual no siempre es posible.

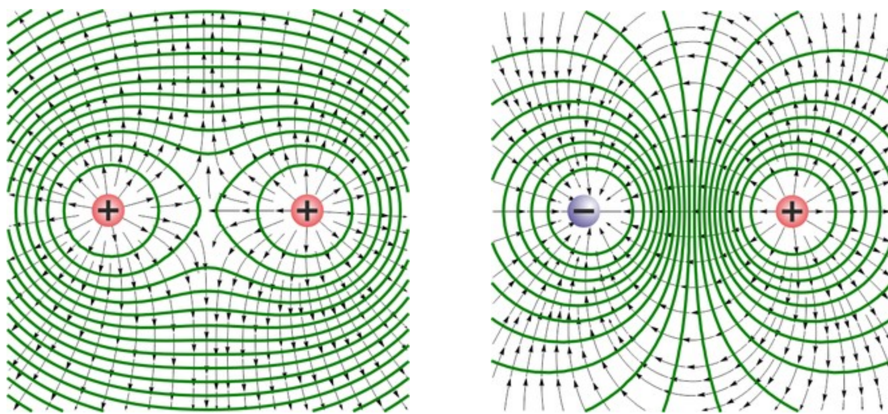
2.6.1 Potencial de dos cargas puntuales

Puesto que el campo eléctrico de un conjunto de cargas es la suma de los campos individuales, su integral, el potencial eléctrico, también lo será. Eso sí, hay que tener cuidado con tomar el mismo origen de potencial para todos los potenciales individuales.

Así, si tenemos dos cargas q_1 y q_2 situadas en dos puntos situados en $\vec{r}_1 = -a\vec{\imath}$ y $\vec{r}_2 = +a\vec{\imath}$, el potencial eléctrico debido a ellas es

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{d_1} + \frac{q_2}{d_2}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{\sqrt{(x+a)^2+y^2+z^2}} + \frac{q_2}{\sqrt{(x-a)^2+y^2+z^2}}\right)$$

En el caso de dos cargas positivas iguales resulta un potencial positivo en todos los puntos del espacio. En este caso, el campo eléctrico es nulo en el punto medio entre las dos cargas, mientras que el potencial es distinto de 0.



Si lo que tenemos es un dipolo, con cargas de la misma magnitud, pero signo opuesto, el potencial puede tener los dos signos. En el punto medio entre las dos cargas el campo eléctrico no es nulo, pero el potencial sí. De hecho, en todo el plano equidistante entre las dos cargas el potencial se anula, ya que esos puntos equidistan de las dos cargas

$$V(x=0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{d} - \frac{q}{d}\right) = 0$$

3 Energía electrostática de un sistema

En el cálculo anterior de la energía potencial eléctrica dijimos que para acercar una carga a otra del mismo signo era preciso realizar un trabajo y que este trabajo quedaba almacenado como energía potencial, lo que se ponía de manifiesto en que si, pasado un tiempo, se liberaba la carga, salía disparada, transformando su energía potencial en cinética.

Sin embargo, existe una visión más general de este proceso. Consideremos que tenemos las dos cargas. Traer la primera no supone trabajo alguno, pues no hay que vencer fuerza alguna. La fijamos en su posición final. Ahora acercamos la segunda carga, realizando el trabajo indicado

$$W_{\mathrm{in}} = U_{\mathrm{e}} = q_2 V_1(\vec{r}_2) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 d_{12}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$$

Fijamos la segunda carga en la posición final. Ahora, en lugar de liberar la segunda carga, liberamos la primera. ¿Qué ocurre entonces? Que esta sale disparada, repelida por q_2. ¿De dónde saca la energía si dijimos que el traer la primera no requiere trabajo? La respuesta es que el trabajo que hacemos al acercar la segunda no se queda como energía solo de esta. Tampoco es que se reparta mitad y mitad entre las dos, ya que una vez que se ha alejado la primera, si ahora soltamos la segunda, no se mueve (ya no hay nadie que la repela), por lo que toda la energía se la ha llevado q_1. Interpretamos entonces que le energía no está en una carga o en otra sino como energía *almacenada en el sistema*, a disposición de cada una de las cargas. Asimismo, es indiferente a qué

carga llamemos “la primera” o “la segunda”. Una vez que están reunidas, el orden de llegada queda olvidado.

La razón es que la energía eléctrica de un sistema es una función de estado. Solo depende de la posición de las cargas en una configuración dada. Nos interesa entonces una expresión para la energía que sea simétrica sin distinción de cual ponemos antes y cuál más tarde. Para ello, observamos que

$$U_\mathrm{e} = q_2 V_1(\vec{r}_2) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 d_{12}} = q_1 V_2(\vec{r}_1)$$

es decir que la energía potencial de la segunda en el campo de la primera es igual a la de la primera en el campo de la segunda. Podemos escribir entonces como forma simétrica la media de ambas

$$U_\mathrm{e} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 d_{12}} = \frac{1}{2} q_1 V_2(\vec{r}_1) + \frac{1}{2} q_2 V_1(\vec{r}_2)$$

Esta expresión se generaliza de forma inmediata a cualquier conjunto de cargas puntuales. La energía almacenada por un sistema es

$$U_\mathrm{e} = \frac{1}{2} q_1 V'(\vec{r}_1) + \frac{1}{2} q_2 V'(\vec{r}_2) + \frac{1}{2} q_3 V'(\vec{r}_3) + \cdots$$

donde $V'(\vec{r}_i)$ es el potencial creado por el resto de cargas del universo en la posición de la carga *i* (es decir, el potencial total menos el debido a la propia carga q_i). Sustituyendo el potencial de cada una de las cargas queda el doble sumatorio

$$U_\mathrm{e} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \sum_{\substack{i,k \\ i\neq k}} \frac{q_i q_k}{d_{ik}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{\substack{i,k \\ i\neq k}} \frac{q_i q_k}{|\vec{r}_k - \vec{r}_i|}$$

En el caso de que tengamos una distribución de carga de volumen o superficial (pero no una lineal), la expresión anterior se generaliza a

$$U_\mathrm{e} = \frac{1}{2} \int \rho V(\vec{r})\,\mathrm{d}v \qquad\qquad U_\mathrm{e} = \frac{1}{2} \int \sigma_s V(\vec{r})\,\mathrm{d}S$$

En estas expresiones no hace falta restar la contribución del propio elemento de carga, por ser ésta despreciable.

Si tenemos dos o más distribuciones simultáneamente, la energía será la suma de las integrales (y sumatorios) correspondientes

$$U_{\rm e} = \frac{1}{2}\int \rho V(\vec{r})\,{\rm d}v + \frac{1}{2}\int \sigma_s V(\vec{r})\,{\rm d}S + \frac{1}{2}\sum_i q_i V'(\vec{r}_i)$$

Una propiedad importante de la energía electrostática de un sistema es que NO verifica el principio de superposición. La energía de dos distribuciones superpuestas no es igual a la suma de las energías que tendrían por separado.

Por ejemplo, si tenemos una nube esférica de radio R con una carga +Q, se obtiene, integrando, una energía

$$U_1 = \frac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_0 R}$$

esta energía es independiente del signo de la carga, es decir que una nube de carga positiva y una de carga negativa tienen la misma energía (positiva en ambos casos, pues hay repulsión en los dos casos). Si ahora superponemos una nube de carga negativa -Q superpuesta a la nube positiva, el resultado no es el doble de energía, sino que nos quedamos sin nada, ya que los campos se cancelan mutuamente, el potencial total es nulo y la energía también vale cero.

3.1 Energía en función del campo

Puede demostrarse que la energía de una distribución volumétrica y/o superficial de cargas puede calcularse mediante la expresión alternativa

$$U_{\rm e} = \frac{1}{2}\int \varepsilon_0 |\vec{E}|^2\,{\rm d}v$$

donde la integral no se extiende solo a donde haya carga, sino a todo el espacio.

Esta expresión alternativa se puede interpretar de una manera diferente a la expresión anterior. En aquella, se consideraba que la energía la almacenaban conjuntamente las cargas, por estar en presencia de otras. En esta versión la energía la almacena el propio campo eléctrico por el hecho de existir.

Usando la analogía mecánica del muelle, la primera expresión equivale a decir que la energía la tienen las masas situadas en el extremo del muelle y es una energía potencial elástica (eléctrica en este caso); la segunda versión equivale a que la energía la almacena el muelle, por estar comprimido. Vemos más intuitiva la segunda interpretación en el caso del muelle, con el campo eléctrico es lo mismo, solo que el “muelle” es invisible e inmaterial.

La expresión en función del campo puede escribirse en la forma

$$U_\mathrm{e} = \int u_\mathrm{e}\,\mathrm{d}v \qquad\qquad u_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0|\vec{E}|^2$$

donde u_e es la *densidad de energía eléctrica* (medida en J/m^3). Veríamos entonces la energía eléctrica como repartida por todo el espacio, estando más concentrada donde el campo es más intenso.

En electrostática, las dos expresiones para la energía eléctrica de una distribución son equivalentes. Sin embargo, en situaciones variables en el tiempo, solo es válida la segunda (ya que para campos variables en el tiempo no se puede definir el potencial eléctrico). Es más, a la hora de estudiar el campo gravitatorio en relatividad, se comprueba que la simple existencia de un campo eléctrico produce campos gravitatorios, por tanto, la visión correcta es admitir que el campo es un ente capaz de almacenar energía, y no son las cargas las que la tienen.

Problemas de electrostática en el vacío

1 Problemas de boletín

1.1 Cálculos de carga total, campo y potencial

Calcule la carga total de las siguientes distribuciones de carga:

1. N cargas de valor q situadas en los vértices de un polígono regular de N lados situado en el plano XY, con centro el origen y cuyo primer vértice se encuentra en $\vec{r}_1 = a\vec{\imath}$.
2. Un anillo circular de radio R con una densidad lineal de carga uniforme λ_0.
3. Un anillo circular de radio R con centro el origen y situado en el plano XY, con una densidad lineal de carga $\lambda(\varphi) = \lambda_0 \cos(\varphi)$, siendo φ el ángulo del vector de posición con el eje OX.
4. Una superficie esférica de radio a con una densidad de carga uniforme σ_0, rodeada por una superficie esférica concéntrica de radio b con densidad de carga $-\sigma_0$.
5. Una esfera maciza de radio R con densidad de carga uniforme ρ_0.
6. Una esfera maciza de radio R con una densidad de carga dependiente de la distancia al centro como

$$\rho(r) = A(R-2r) \qquad\qquad (r < R)$$

Calcule el campo y el potencial eléctrico en el origen de coordenadas para todos los sistemas del problema

1.2 Campo de dos cargas

Se tienen dos cargas q_1 y q_2 situadas respectivamente en los puntos $\vec{r}_1 = -12\,\vec{\imath}\,(\mathrm{cm})$ y $\vec{r}_2 = +12\,\vec{\imath}\,(\mathrm{cm})$. Halle el campo eléctrico en los puntos

$$\vec{r}_A = \vec{0} \qquad \vec{r}_B = +9\vec{\jmath} \qquad \vec{r}_C = -9\vec{k} \qquad \vec{r}_D = 12\vec{\imath} + 32\vec{\jmath}$$

(todas las distancias en cm) para los cuatro casos siguientes

1. $q_1 = q_2 = +1\,\mathrm{nC}$
2. $q_1 = +1\,\mathrm{nC}$, $q_2 = -1\,\mathrm{nC}$
3. $q_1 = +1\,\mathrm{nC}$, $q_2 = +9\,\mathrm{nC}$
4. $q_1 = +1\,\mathrm{nC}$, $q_2 = -9\,\mathrm{nC}$

Para los cuatro pares de cargas, localice el punto del eje OX en que se anula el campo eléctrico.

Calcule el potencial eléctrico para todos los casos en todos los puntos indicados.

1.3 Campo de distribuciones con simetría esférica

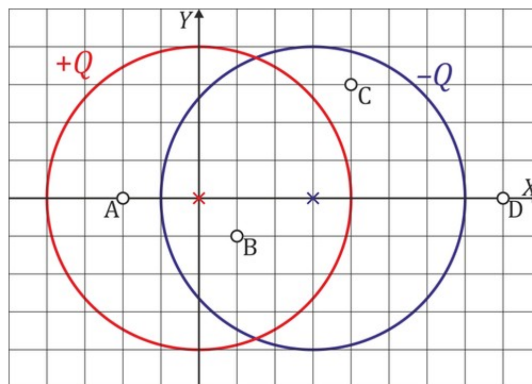
Con ayuda de la ley de Gauss, calcule el campo eléctrico en todos los puntos del espacio para las siguientes distribuciones con simetría esférica:

1. Una superficie esférica de radio *a* que almacena una carga *Q* distribuida uniformemente.
2. Dos superficies esféricas concéntricas, de radios *a* y *b* ($a < b$) que almacenan respectivamente cargas $+Q$ y $-Q$, distribuidas uniformemente.
3. Dos superficies esféricas concéntricas, de radios *a* y *b* ($a <$ b) cargadas respectivamente con densidades superficiales uniformes $+\sigma_0$ y $-\sigma_0$.
4. Una esfera maciza de radio *R* que almacena una carga *Q* distribuida uniformemente en su volumen.
5. Una esfera maciza de radio *R* con una densidad de carga dependiente de la distancia al centro como

$$\rho(r) = A(R - 2r) \qquad\qquad (r < R)$$

1.4 Dos esferas huecas

Se tiene un sistema de cargas formado por dos superficies esféricas de radio $b = 4\,\mathrm{cm}$cuyos centros distan $a = 3\,\mathrm{cm}$, como indica la figura. Las superficies está cargadas uniformemente con cargas respectivas de $+1\,\mathrm{nC}$y $-1\,\mathrm{nC}$



Para los puntos marcados en la figura (en cm)

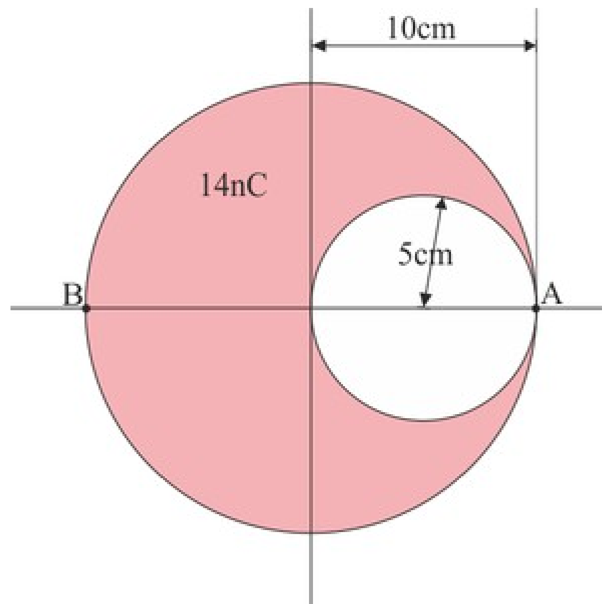
$$\vec{r}_A = -2\vec{\imath} \qquad \vec{r}_B = \vec{\imath} - \vec{\jmath} \qquad \vec{r}_C = 4\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} \qquad \vec{r}_D = 8\vec{\imath}$$

1. Calcule el campo eléctrico.
2. Calcule el potencial eléctrico.
3. A partir de la integración de la fuerza, halle el trabajo que debe realizar un agente externo para mover cuasiestáticamente una carga de $-1\,\mathrm{nC}$ desde el punto A al punto D moviéndola a lo largo del eje X.

1.5 Campo y potencial de una esfera con hueco

Se tiene una carga $Q = 14\,\mathrm{nC}$ distribuida uniformemente en una esfera maciza de radio 10.0 cm en la que se ha horadado una cavidad esférica de radio 5.0 cm cuyo centro está a 5.0 cm de la esfera grande.

1. Demuestre que el campo en el interior de la cavidad es uniforme y halle su valor.
2. Calcule el valor del campo en el exterior de la esfera en un punto situado sobre la recta que une los dos centros, a una distancia de 25 cm del centro de la esfera grande.
3. Calcule la diferencia de potencial entre los dos puntos diametralmente opuestos de la superficie exterior situados en la recta que pasa por los dos centros.



1.6 Campo eléctrico de un anillo y un disco

Calcule, por integración directa, el campo eléctrico en los puntos del eje de un anillo de radio *R* que almacena una carga *Q* distribuida uniformemente.

A partir del resultado anterior calcule el campo en los puntos del eje de un disco circular de radio *R*, en el cual existe una carga *Q* distribuida uniformemente.

1.7 Campo eléctrico de un plano y de dos planos

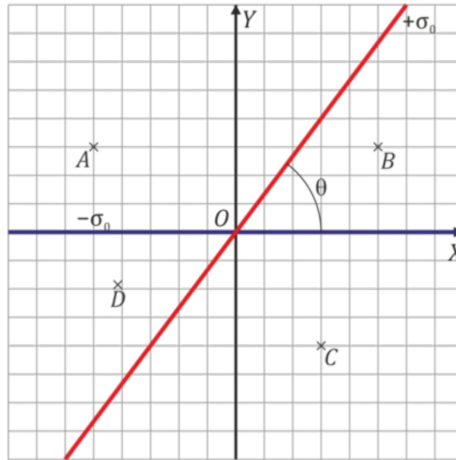
Empleando el resultado del disco, halle el campo eléctrico en cualquier punto del espacio debido a un plano infinito cargado uniformemente con una densidad de carga σ_0.

Suponga que se tienen dos planos infinitos paralelos separados una distancia a que almacenan respectivamente densidades de carga $+\sigma_0$ y $-\sigma_0$. Calcule el campo en todos los puntos del espacio.

Para el sistema de los dos planos, calcule la diferencia de potencial entre el plano cargado positivamente y el cargado negativamente.

1.8 Dos planos cargados oblicuos

Se tiene una distribución de cargas formada por dos planos de gran extensión situados perpendicularmente al plano OXY tal como indica la figura (la cuadrícula tiene un espaciado *b*). El ángulo θ es tal que $\operatorname{tg}(\theta)=4/3$. Uno de los planos almacena una densidad de carga uniforme $+\sigma_0$ y el otro una densidad de carga $-\sigma_0$.



1. Halle el campo eléctrico en los puntos A, B, C y D.
2. Calcule el potencial eléctrico en los mismos puntos tomando como origen de potencial el origen de coordenadas O.
3. Además de los planos cargados se colocan dos cargas puntuales +*q* en los puntos A y B. Halle la fuerza eléctrica sobre cada una de ellas.

1.9 Campo eléctrico de un segmento

Calcule el campo eléctrico producido por un segmento rectilíneo cargado uniformemente con una densidad de carga λ_0 en cualquier punto del plano perpendicular al segmento por su punto medio.

A partir del resultado anterior, halle el campo eléctrico creado por un hilo rectilíneo infinitamente largo cargado con una densidad homogénea λ_0.

1.10 Potencial eléctrico debido a una superficie esférica

Halle el potencial eléctrico en todos los puntos del espacio creado por una carga Q distribuida uniformemente sobre una superficie esférica de radio R.

1.11 Potencial eléctrico debido a una esfera maciza

Halle, a partir del campo eléctrico, el potencial eléctrico debido a una esfera de radio R que almacena una carga Q distribuida uniformemente en su volumen.

Para el centro de la esfera, calcule el potencial eléctrico por integración directa. Compruebe que el resultado coincide con el interior para este punto.

1.12 Potencial eléctrico en el eje de un anillo

Halle el potencial eléctrico en todos los puntos del eje de un anillo de radio 1.00 cm sobre el cual hay distribuida una carga de 10.0 nC, como función de la distancia z al plano del anillo.

¿Qué trabajo es necesario realizar para llevar una carga de 2 nC desde el infinito hasta el centro de este anillo?

Supongamos que en lugar de una carga positiva tenemos una de −2 nC que solo puede moverse a lo largo del eje del anillo y que se suelta en reposo a una distancia $z = 1.0\,\mathrm{mm}$ del centro del anillo, ¿qué tipo de movimiento describe esta carga?

1.13 Energía electrostática de un sistema de cargas puntuales

Halle la energía electrostática almacenada en los siguientes sistemas de cargas puntuales:

1. $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = +14\,\mathrm{nC}$.
2. $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = -14\,\mathrm{nC}$.
3. $q_1 = q_3 = +14\,\mathrm{nC}$, $q_2 = q_4 = -14\,\mathrm{nC}$.
4. $q_1 = q_2 = +14\,\mathrm{nC}$, $q_3 = q_4 = -14\,\mathrm{nC}$.
5. $q_1 = q_4 = +14\,\mathrm{nC}$, $q_2 = q_3 = -14\,\mathrm{nC}$.

situadas en cada caso en los vértices de un rectángulo

$\vec{r}_1 = \vec{0} \qquad \vec{r}_2 = 7\vec{\imath}\,\mathrm{cm} \qquad \vec{r}_3 = (7\vec{\imath} + 24\,\vec{\jmath})\,\mathrm{cm} \qquad \vec{r}_2 = 24\vec{\jmath}\,\mathrm{cm}$

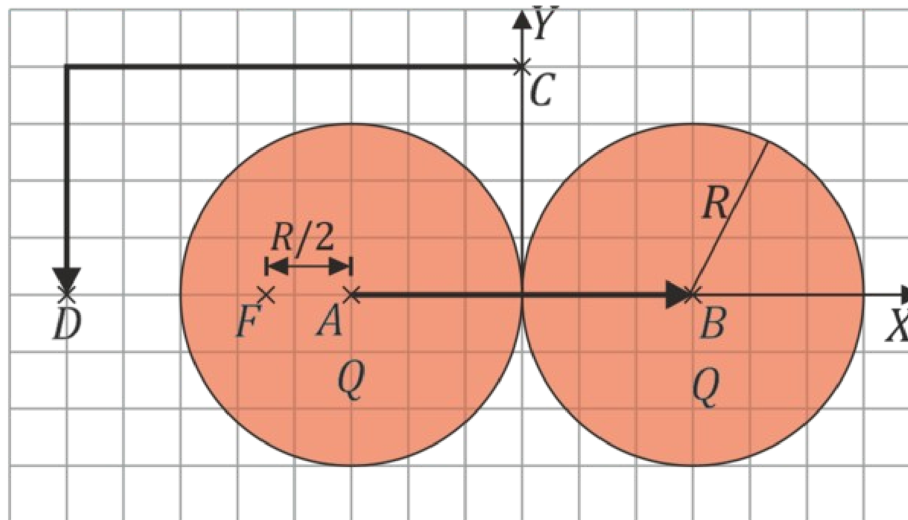
1.14 Energía electrostática de superficies esféricas

Calcule la energía electrostática almacenada en las siguientes distribuciones de carga:

1. Una superficie esférica de radio a sobre la cual hay distribuida uniformemente una carga Q.
2. Dos superficies esféricas concéntricas de radios a y b ($a < b$) sobre las cuales hay distribuidas uniformemente cargas $+Q$ y $-Q$ respectivamente.
3. Dos superficies esféricas concéntricas de radios a y b ($a < b$) sobre las cuales hay distribuidas cargas con densidades $+\sigma_0$ y $-\sigma_0$ respectivamente.
4. Tres superficies esféricas concéntricas de radios $2b$, $3b$ y $6b$, que almacenan, respectivamente, cargas $_1$, $_2$ y $_3$. ¿A qué se reduce el resultado si $Q_1 = Q_3 = Q_0$, $Q_2 = -Q_0$?

1.15 Dos esferas cargadas adyacentes

Dos esferas de radio R están cargadas uniformemente en su volumen con una carga Q cada una. Las dos esferas son adyacentes, de forma que sus centros se hallan en $R\vec{\imath}$.



1. Calcule el campo eléctrico en los puntos $A(-R,0)$, $B(+R,0)$, $C(0,4R3)$, $D(-8R3,0)$ y $F(-3R2,0)$. El campo en todos estos puntos puede escribirse en la forma

$$\vec{E}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\vec{\alpha}$$

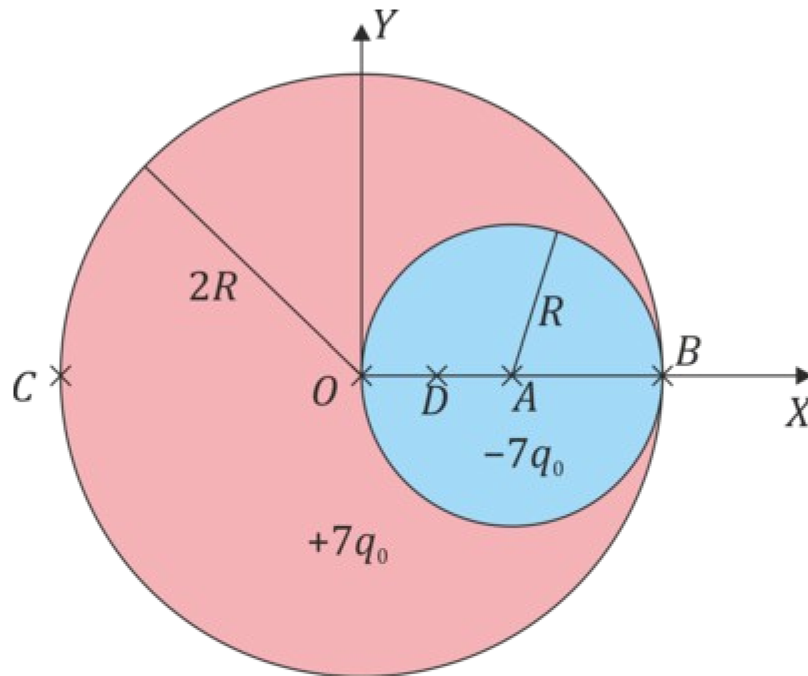
con $\vec{\alpha}$ un cierto coeficiente vectorial distinto para cada punto, que es el que hay que determinar.

1. Calcule el trabajo necesario para mover una cierta carga puntual q desde el punto A al punto B, si la carga se desplaza lentamente a lo largo del segmento rectilíneo indicado.
2. Calcule el trabajo necesario para mover la misma carga puntual q desde el punto C al punto D, si la carga se desplaza lentamente a lo largo del camino quebrado que se indica.

2 Problemas adicionales

2.1 Esfera cargada con hueco relleno

Una esfera de radio $2R$ posee un hueco también esférico de radio R cuyo centro se encuentra a una distancia R del centro de la esfera grande. La esfera grande almacena una carga $+7q_0$ distribuida uniformemente en su volumen, mientras que en el hueco hay una carga $-7q_0$ también distribuida uniformemente.



1. Halle el campo eléctrico en los puntos O, B, C, A y D marcados en la figura. A es el centro de la esfera negativa y D es equidistante de O y A.
2. Calcule el trabajo para mover una carga puntual q desde el punto B al punto C, diametralmente opuesto.
3. Calcule el trabajo para mover la misma carga desde el punto B hasta el punto O.
4. En puntos exteriores a la esfera y alejados de ella, el sistema se ve como un dipolo. ¿Cuánto vale el momento dipolar eléctrico de este dipolo?

2.2 Cálculos a partir de un campo eléctrico

El valor de un campo eléctrico en todos los puntos del espacio viene dado por

$$\vec{E} = \begin{cases} \vec{0} & r < a \\ E_0 \left(\frac{a}{r}\right)^2 \vec{u}_r & a < r < 2a \\ \\ E_0 \left(\frac{2a}{r}\right)^2 \vec{u}_r & r > 2a \end{cases}$$

siendo r la distancia al origen de coordenadas y $\vec{u}_r$ el vector unitario radial hacia afuera.

1. Calcule las densidades de carga que causan este campo.
2. ¿Cuánto vale la carga total de la distribución?
3. Halle el potencial eléctrico en $r = 0$, en $r = a$ y en $r = 2a$, tomando como origen de potencial el infinito.
4. Calcule la energía electrostática almacenada en este sistema.

2.3 Sistema de tres superficies esféricas cargadas

Supongamos un sistema formado por tres superficies esféricas concéntricas, de radios $R_1 = 2a$, $R_2 = 3a$ y $R_3 = 6a$, respectivamente, que almacenan cargas Q_1, Q_2 y Q_3 distribuidas uniformemente en cada una.

Calcule

1. El campo eléctrico en todos los puntos del espacio.
2. El trabajo necesario para llevar una carga q_0 desde el infinito hasta el centro del sistema.
3. La energía electrostática almacenada en el sistema de tres esferas (sin incluir la carga q_0).

para cada uno de los siguientes tres casos:

- $Q_1 = Q_2 = Q_0$, $Q_3 = -2Q_0$.
- $Q_1 = Q_3 = Q_0$, $Q_2 = -2Q_0$.
- $Q_2 = Q_3 = Q_0$, $Q_1 = -2Q_0$.

2.4 Carga distribuida en un anillo

Un anillo de radio R se encuentra en el plano OXY con centro el origen de coordenadas. El anillo almacena una distribución de carga con densidad lineal

$$\lambda = \lambda_0 \cos^2\left(\frac{\theta'}{2}\right)$$

siendo θ' el ángulo que forma con el eje OX el vector de posición de los puntos del anillo. Para esta distribución, halle

1. La carga total almacenada
2. El potencial eléctrico en el origen de coordenadas
3. El campo eléctrico en el origen de coordenadas.

2.5 Comparación del campo de dos cargas

Considere las dos situaciones siguientes:

- Una carga +20 nC situada en el origen de coordenadas.
- Dos cargas de +10 nC situadas en $\pm 10\,\vec{\imath}$ (cm)

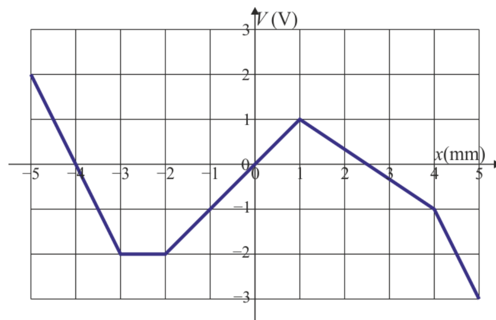
Para cada una de estas dos situaciones, halle:

1. El campo eléctrico en los puntos $y\vec{\jmath}$ con y = 0, 5, 10, 20, 50 y 100cm. ¿Cuánto vale, en cada caso, el error relativo cometido al sustituir las dos cargas puntuales por una sola, de doble valor, situada en el origen?
2. Repita el cálculo para el potencial eléctrico en los mismos puntos.

2.6 Fuerza eléctrica debida a un potencial definido a trozos

Considere que el potencial eléctrico a lo largo del eje X viene dado por la gráfica de la figura. Indique el sentido de la fuerza sobre una carga positiva sometida a este potencial. ¿Dónde es máxima esta fuerza en módulo? Si la carga se suelta en reposo en $x = 0$, ¿qué tipo de movimiento describe?

¿Cómo cambian los resultados si la carga es negativa?



3 Preguntas de test

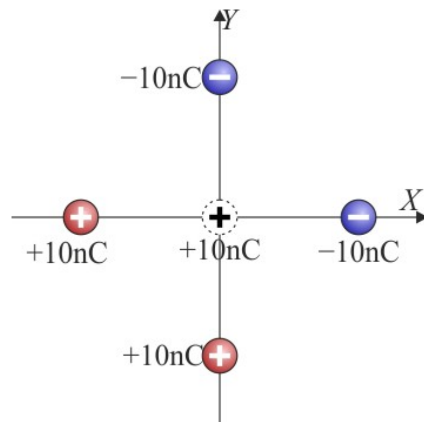
3.1 Flujo de cuatro cargas en un cuadrado

Se tienen cuatro cargas en los vértices consecutivos de un cuadrado ABCD de lado $a = 10\,\mathrm{cm}$, siendo sus valores $q_A = 1\,\mathrm{nC}$, $q_B = 2\,\mathrm{nC}$, $q_C = 3\,\mathrm{nC}$, $q_D = 4\,\mathrm{nC}$. ¿Cuánto vale el flujo del campo eléctrico multiplicado por ε_0 a través de una esfera centrada en la primera carga y de radio 12 cm?

- **A** 6 nC
- **B** 1 nC
- **C** 10 nC
- **D** 7 nC

3.2 Fuerza de cuatro cargas en un cuadrado

Se tienen cuatro cargas en los vértices de un cuadrado cuya diagonal mide 20 cm, según ilustra la figura. Los valores de todas las cargas son +10 nC o − 10 nC



¿Cuánto vale aproximadamente la fuerza sobre una carga de 10 nC situada en el centro del cuadrado?

- **A** $18(-\vec{\imath} - \vec{\jmath})(\mu\text{N})$
- **B** $180(\vec{\imath} + \vec{\jmath})(\mu\text{N})$
- **C** Es nula
- **D** $18(\vec{\imath} + \vec{\jmath})(\mu\text{N})$

¿Cuánto vale aproximadamente el trabajo para llevar la carga central hasta el infinito?

- **A** No hay información suficiente para hallarlo.
- **B** −36 µJ.
- **C** +36 µJ.
- **D** Es nulo.

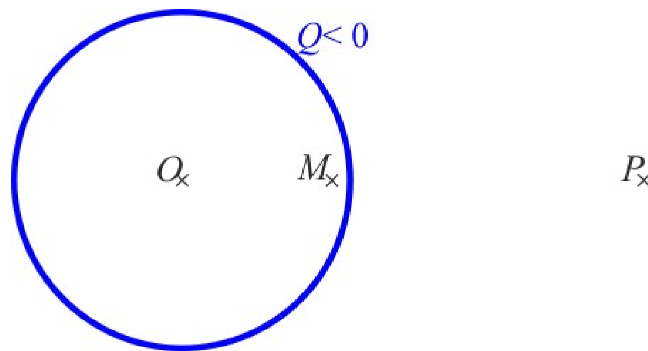
Suponiendo que no está la carga central, ¿cuánto vale la energía electrostática almacenada en el sistema?

- **A** Es nula.

- **B** $-9\,\mu J$.
- **C** $+9\,\mu J$.
- **D** No hay información suficiente para hallarla.

3.3 Distribución de carga en esfera

Se tiene únicamente una distribución uniforme de una carga $Q < 0$ sobre una superficie esférica de radio a. Para los tres puntos de la figura,



¿En cuál es mayor en módulo el campo eléctrico?

- **A** En M.
- **B** En O.
- **C** No hay información suficiente para saberlo.
- **D** En P.

¿Cómo se ordena el potencial de los tres puntos?

- **A** $V_O > V_M < V_P$.
- **B** $V_O = V_M > V_P$.
- **C** $V_O < V_M > V_P$.
- **D** $V_O = V_M < V_P$.

3.4 Energía de dos cargas

Dos cargas puntuales positivas q_1 y q_2 se encuentran a una distancia a. Si la distancia entre ellas se reduce a la mitad, ¿cómo cambia la energía electrostática del sistema?

- **A** Aumenta al cuádruple
- **B** Se reduce a la mitad.

- **C** Aumenta al doble.
- **D** No cambia.

3.5 Cargas en una barra

En los dos extremos de una barra rígida se encuentran cargas de la misma magnitud y signo opuesto. La barra se encuentra inicialmente en reposo y sumergida en un campo eléctrico uniforme, formando un cierto ángulo con el campo. ¿Qué efecto produce el campo sobre la barra?

- **A** Ninguno. Las fuerzas se cancelan y la barra permanece en reposo.
- **B** Produce un par de fuerzas que tiende a alinear la barra con el campo.
- **C** Produce un par de fuerzas que tiende a colocar la barra perpendicular al campo.
- **D** Produce una fuerza neta que tiende a desplazar la barra.

3.6 Esfera cargada en volumen y superficie

Se tiene una distribución de carga formada por una esfera de radio b cargada uniformemente con una densidad volumétrica de carga ρ_0, Esta esfera está forrada por una superficie esférica (también de radio b) con densidad de carga superficial σ_0, de tal forma que la carga total del sistema es nula.

¿Cuánto vale σ_0?

- **A** $-\rho_0 b$
- **B** $-\rho_0$
- **C** $-4\pi b^2\rho_0$
- **D** $-\rho_0 b / 3$

Para esta distribución de carga, ¿cuánto vale el campo eléctrico que produce?

- **A** Es nulo en el interior de la esfera y vale $Q\vec{u}_r/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$ en el exterior con $Q = (4\pi b^3/3)\rho_0$.
- **B** Es nulo en el interior de la esfera y vale $Q\vec{u}_r/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$ en el exterior con $Q = (4\pi b^2)\sigma_0$.
- **C** Es nulo en todos los puntos del espacio.
- **D** Es nulo en el exterior de la esfera y vale $\rho_0 r/(3\varepsilon_0)\vec{u}_r$ en el interior.

Para este sistema, ¿cuánto vale el potencial eléctrico en el centro de la esfera?

- **A** $\rho_0 b^2/(6\varepsilon_0)$,
- **B** Es nulo.
- **C** Tiende a infinito.
- **D** $-\sigma_0 b/\varepsilon_0$.

3.7 Campo de dos cargas

Una carga puntual de valor $1.2\,\mathrm{nC}$ se encuentra situada en el punto $30\,\vec{\imath}\,\mathrm{cm}$ y una de valor $-1.6\,\mathrm{nC}$ en $40\,\vec{\jmath}\,\mathrm{cm}$.

¿Cuánto vale, en módulo, el campo en $\vec{r}=\vec{0}$?

- **A** 30 V/m
- **B** 150 V/m
- **C** 210 V/m
- **D** −30 V/m

¿Y el potencial eléctrico en el mismo punto $\vec{r}=\vec{0}$?

- **A** $(-36\vec{\imath}+36\,\vec{\jmath})\mathrm{V}$
- **B** 72 V.
- **C** 210 V.
- **D** 0 V.

3.8 Definición de franklin

Un franklin es una unidad de carga eléctrica definida como aquella tal que dos cargas de 1 franklin situadas a 1 cm se ejercen una fuerza de 1 dina (= 10^{-5}N). ¿A cuantos culombios equivale un franklin?

- **A** $1.11\times10^{-19}\,\mathrm{C}$
- **B** $3.3\,\mathrm{nC}$
- **C** $0.33\,\mathrm{nC}$
- **D** $1.11\times10^{-17}\,\mathrm{C}$

3.9 Sentido del campo eléctrico

Dada una cierta distribución de potencial eléctrico, el campo eléctrico apunta en el sentido...

- **A** en que decrece el potencial.
- **B** tangente a las superficies equipotenciales.
- **C** en que crece o decrece el potencial, dependiendo de donde estén las cargas eléctricas.
- **D** en que crece el potencial.

3.10 Esferas concéntricas

Se tienen dos superficies esféricas concéntricas de radios *a* y 2*a*, centradas en el origen de coordenadas. La interior está cargada con una densidad superficial uniforme $+\sigma_0$ y la exterior con una $-\sigma_0$.

El campo eléctrico en un punto a $\vec{r}=4a\vec{\imath}$ vale

- **A** $\sigma_0/(4\varepsilon_0)\vec{k}$
- **B** $-3\sigma_0/(16\varepsilon_0)\vec{\imath}$
- **C** $\vec{0}$
- **D** $\sigma_0/(4\varepsilon_0)\vec{\imath}$

Para este sistema el potencial en el origen de coordenadas vale\ldots

- **A** ∞
- **B** 0
- **C** $+a\sigma_0/\varepsilon_0$
- **D** $-a\sigma_0/\varepsilon_0$

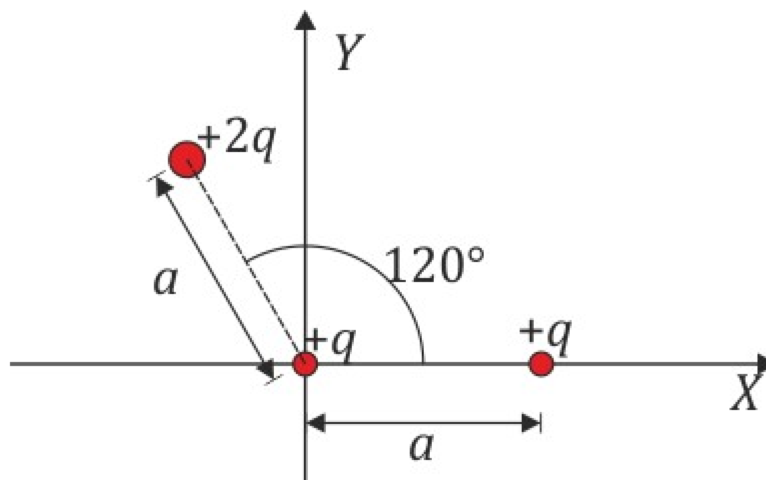
3.11 Fuerza sobre una carga en movimiento

Una carga puntual se mueve en el seno de un campo eléctrico $\vec{E} = 1000\,\vec{\imath}\,(\mathrm{V/m})$ y de un campo magnético $\vec{B} = 10\,\vec{k}\,(\mathrm{mT})$. ¿Con qué velocidad debe moverse la carga para que la fuerza electromagnética sobre ella sea nula?

- **A** $\vec{v} = -100\,\vec{\jmath}\,(\mathrm{km/s})$
- **B** Es imposible que se anule la fuerza.
- **C** $\vec{v} = -100\,\vec{k}\,(\mathrm{km/s})$
- **D** $\vec{v} = +100\,\vec{\jmath}\,(\mathrm{km/s})$

3.12 Acción de dos cargas sobre una tercera

Se tiene un sistema formado por tres cargas puntuales de valores + *q*, + *q* y + 2*q* situadas en las posiciones de la figura.



Si llamamos $F_0 = q^2/(4\pi\varepsilon_0 a^2)$, la fuerza sobre la carga situada en el origen es igual a

- **A** $+(F_0/2)\vec{\imath} + (\sqrt{3}/2)F_0\vec{\jmath}$

- **B** $-(F_0/2)\vec{\imath} - (\sqrt{3}/2)F_0\vec{\jmath}$
- **C** $\vec{0}$
- **D** $-\sqrt{3}F_0\vec{\jmath}$

¿Qué trabajo es necesario realizar por un agente externo para llevar la carga cuasiestáticamente del origen de coordenadas hasta el infinito?

- **A** $-3F_0a$.
- **B** Es nulo.
- **C** Es infinito.
- **D** $+3F_0a$.

3.13 Dos cargas desiguales

Se tienen dos cargas $+10\,\mathrm{nC}$ y $-40\,\mathrm{nC}$ situadas respectivamente en $\vec{r}_1 = \vec{0}$ y $\vec{r}_2 = 15\vec{\imath}$ (cm).

¿En qué punto se anula el campo eléctrico debido a las dos cargas? (en cm)

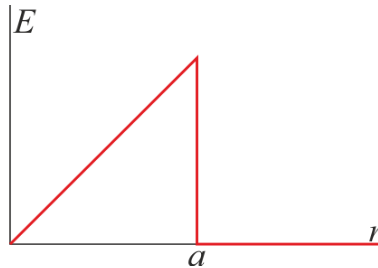
- **A** No se anula en ningún punto.
- **B** $5\vec{\imath}$
- **C** $3\vec{\imath}$
- **D** $-15\vec{\imath}$

¿En qué punto se anula el potencial eléctrico, si el origen de potencial está en el infinito?

- **A** $3\vec{\imath}$
- **B** $-15\vec{\imath}$
- **C** $5\vec{\imath}$
- **D** No se anula en ningún punto.

3.14 Campo eléctrico radial

En una región del espacio el campo eléctrico es radial desde el origen de coordenadas $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$, dependiendo de la distancia al centro según la gráfica



¿Cómo es la densidad de carga que produce este campo?

- **A** Solo una esfera cargada uniformemente con una densidad positiva.
- **B** Una esfera cargada uniformemente con una densidad positiva, recubierta de una superficie negativa.
- **C** No hay información suficiente para saberlo.
- **D** Una esfera cargada con una densidad que aumenta al alejarnos del centro.

Electrostática en presencia de materiales

Al considerar la electrostática en el vacío, se analizan los campos, fuerzas y potenciales debidos a una distribución conocida de cargas flotando en el vacío. El modelo de cargas es adecuado incluso en presencia de materiales, ya que a nivel microscópico la materia es un 99.9% vacío y los protones y electrones se comportan como cargas puntuales separadas.

Sin embargo, cuando se considera la presencia de medios materiales, aparece un factor que complica sustancialmente la determinación de los campos, y es que las cargas pueden moverse por el interior de los materiales. Si tenemos una disolución en la que nadan iones con cargas positivas y negativas y aplicamos un campo eléctrico, las cargas positivas se moverán en un sentido y las negativas en el opuesto. Por

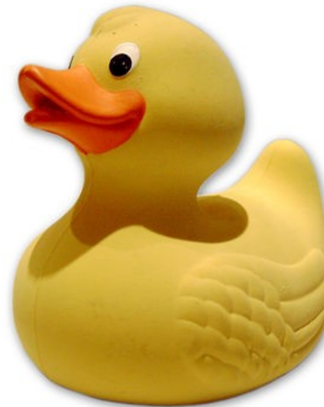
ello, la densidad de carga, que habíamos supuesto que era un dato, en realidad es una incógnita más del problema.

A la hora de estudiar la electrostática en presencia de medios materiales, la primera clasificación que se hace es considerar si estos permiten el movimiento de cargas o no. La propiedad física que mide la facilidad con la que se mueven las cargas por el interior de un material es la *conductividad* σ. Atendiendo a su conductividad los materiales se clasifican en

Conductores

Permiten el movimiento de cargas por su interior. En el límite se encuentra el modelo de *conductor perfecto*, que es aquel que no opone ninguna oposición al movimiento de cargas por su interior. El cobre y la plata son buenas aproximaciones al modelo del conductor perfecto.





Dieléctricos o aislantes

En el otro extremo de la escala se encuentran aquellos materiales que no permiten el movimiento de cargas por su interior. En ellos todas las cargas están ligadas en sus respectivos átomos y no pueden desplazarse. Suelen ser materiales plásticos o cristalinos con fuertes enlaces covalentes. Incluso en materiales dieléctricos el campo no es el mismo que en el vacío, por la presencia de dipolos inducidos por el campo eléctrico. El límite es el modelo de *dieléctrico ideal* o *aislante perfecto*, que no permite en absoluto el movimiento de cargas por su interior.

En un sistema real hay presentes materiales de los dos tipos. Por ejemplo, un cable coaxial de los que se usan en la transmisión de señales, tiene un núcleo metálico conductor, rodeado de una capa de dieléctrico, cubierta a su vez de una malla conductora, rodeada por otra capa de aislante protector.



Todos los materiales poseen una cierta conductividad y se encuentran en algún punto intermedio de la gama que va del conductor perfecto al dieléctrico ideal, por lo que la consideración del material como conductor o dieléctrico es relativa al resto de materiales presentes y al tiempo de estudio. Si al material le da tiempo de sobra a alcanzar el equilibrio electrostático, lo consideramos como conductor. Si no lo alcanza, se comporta como un dieléctrico.

Dado el diferente comportamiento de unos y otros materiales, conviene estudiarlos separadamente. Primero se consideran materiales conductores flotando en el vacío y a continuación se incluye el efecto de que entre ellos haya dieléctricos ideales.

Problemas de electrostática en medios materiales (GIE)

1 Problemas de boletín

1.1 Esfera conductora en equilibrio electrostático

Se tiene una esfera metálica maciza de radio *a* y no hay más conductores ni cargas en el sistema. Si la esfera almacena una carga total *Q* calcule:

1. el potencial y el campo eléctrico en todos los puntos del espacio.
2. el voltaje al que se encuentra
3. la densidad superficial de carga.
4. la energía electrostática que almacena.

Particularice los resultados anteriores para un radio $a = 10\,\mathrm{cm}$ y una carga $Q = 36\,\mathrm{nC}$.

Suponga ahora que lo que se conoce inicialmente su voltaje V_0, pero no su carga. Halle en ese caso la carga que almacena, así como el resto de las cantidades obtenidas anteriormente. Particularice los resultados anteriores para un voltaje $V_0 = 1.8\,\mathrm{kV}$.

1.2 Dos esferas conductoras concéntricas

Se construye un sistema de dos conductores metálicos. El "1" es una esfera maciza de radio 9 mm. El "2" es una corona esférica gruesa, concéntrica con la anterior, de radio interior 12 mm y exterior 18 mm. Halle la carga almacenada y el potencial al que se encuentra cada conductor, así como la energía almacenada en el sistema, para los siguientes casos:

1. La esfera almacena una carga de +4 nC y la corona está aislada y descargada.
2. La esfera está aislada y descargada y la corona almacena +6 nC
3. La esfera almacena una carga de +4 nC y la corona de +6 nC
4. La esfera almacena una carga de −4 nC y la corona de +4 nC
5. La esfera almacena una carga de −4 nC y la corona de +6 nC
6. La esfera almacena una carga de +4 nC y la corona está a tierra
7. La esfera está a tierra y la corona almacena una carga de +6 nC
8. La esfera está a +2 kV y la corona está a tierra.
9. La esfera está a tierra y la corona a +2 kV.
10. La esfera y la corona están a +2 kV
11. La esfera está a +2 kV y la corona está a −2 kV.

Sugerencia: Resuélvase primero el caso general, estableciendo relaciones entre las cargas y los potenciales, y expresiones para la energía. Puede ser útil construir un circuito equivalente.

1.3 Conexión de dos esferas alejadas

Se tiene un conductor formado por dos esferas de radios a y b ($a < b$), muy alejadas entre sí (de forma que la influencia de una sobre la otra es despreciable), pero unidas por un cable conductor ideal. El conductor almacena una carga Q_0.

1. ¿Cuánta carga se va a cada esfera? ¿En cuál de las dos es mayor la carga almacenada?
2. ¿En cual de las dos esferas es mayor la densidad de carga? ¿Y el campo eléctrico en la superficie?



1.4 Conexión de una fuente a un conductor

Un determinado sistema está formado exclusivamente por un conductor de capacidad C. Inicialmente este conductor almacena una carga Q_A.

Una fuente de tensión continua V_B se conecta al conductor mediante un interruptor que se cierra bruscamente.

1. ¿Cuánto cambia la carga almacenada en el conductor?
2. ¿Cuánto cambia la energía electrostática del sistema?
3. ¿Qué trabajo realiza la fuente en este proceso? ¿Cuánta energía se disipa?
4. Supóngase ahora que la fuente es una de tensión regulable que se hace variar lentamente desde V_A (la correspondiente al estado inicial) a V_B. ¿Cómo quedan en ese caso las respuestas a los tres apartados anteriores?

1.5 Tres placas conductoras paralelas

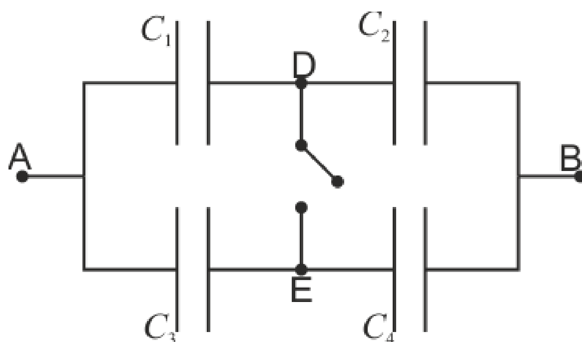
Se colocan paralelamente tres placas metálicas cuadradas de 20 cm de lado y espesor despreciable, estando la primera separada de la segunda una distancia de 0.2 mm y ésta de la tercera 0.8 mm. Halle:

1. La carga almacenada en cada placa.
2. El potencial al que se encuentra cada una.
3. El campo eléctrico entre las placas.
4. La energía almacenada en el sistema.

para los siguientes casos:

- La placa central está aislada y descargada, la primera a 24 V y la tercera a tierra.
- La placa central está a 24 V y las otras dos a tierra.
- La primera está a −24 V, la central a +24 V y la tercera a tierra.
- La placa central almacena una carga de 4 nC y las dos placas exteriores están conectadas entre sí.

1.6 Sistema de cuatro condensadores



El circuito de la figura está formado por cuatro condensadores cuyas capacidades son: $C_1 = 30\,\mathrm{nF}$, $C_2 = 60\,\mathrm{nF}$, $C_3 = 120\,\mathrm{nF}$ y $C_4 = 40\,\mathrm{nF}$. La diferencia de potencial entre A y B es de $12\,\mathrm{V}$. ¿Qué diferencia de potencial mide un voltímetro situado entre los puntos D y E? Calcule la carga de cada condensador y la diferencia de potencial entre las placas de cada uno, así como la energía almacenada en el sistema.

Suponga que, sin desconectar la fuente, se cierra el interruptor entre los puntos D y E. Tras la conexión, ¿cuánto valen las cargas, los voltajes y la energía almacenada?

1.7 Condensador que se rellena de dieléctrico

El espacio entre dos placas metálicas circulares de 26 cm de diámetro, situadas paralelamente a una distancia 3 mm está vacío.

Entre las placas se establece una diferencia de potencial de 20 V

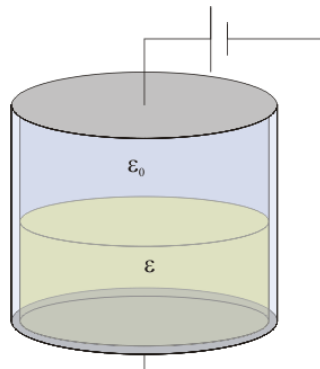
1. ¿Cuánto vale la energía almacenada en el sistema?
2. Suponga que, una vez cargado el condensador se desconecta la fuente y se introduce entre las placas una lámina de metacrilato ($\varepsilon_r = 3.3$) de 3 mm de espesor. ¿Cuánto cambia la energía almacenada en el sistema? ¿Cómo se explica la diferencia?
3. Suponiendo que el proceso anterior se hubiera efectuado sin desconectar la fuente, ¿cuál sería en ese caso la variación en la energía? ¿Cuánto trabajo realizaría la fuente de tensión?

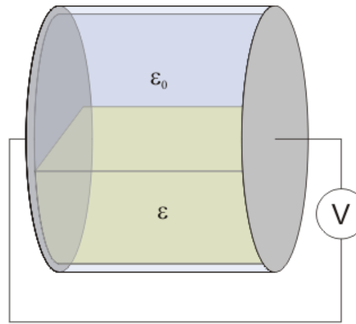
1.8 Condensador que se gira 90°

Se construye un recipiente cilíndrico, con bases perfectamente conductoras de sección S, separadas una distancia a, y paredes perfectamente dieléctricas, de espesor despreciable. El interior se llena hasta la mitad con un líquido dieléctrico y permitividad ε. El resto se deja vacío.

El recipiente se coloca en un principio con las bases dispuestas horizontalmente. En esta posición, se carga hasta que la diferencia de potencial entre las placas es V_0. Acto seguido se abre el circuito y, sin descargar las placas, el recipiente es girado $90°$ alrededor de un eje horizontal. ¿Cuál es la nueva diferencia de potencial entre las placas? ¿Cómo varía la energía almacenada?

Desprecie los efectos de borde y la influencia de las paredes.

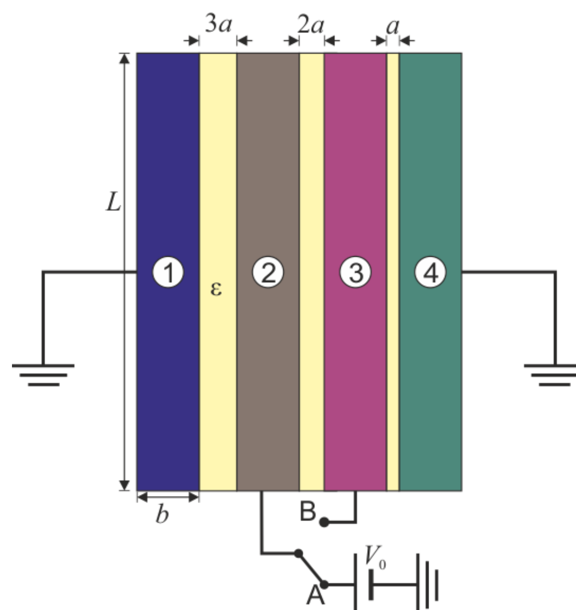




1.9 Cuatro conductores paralelos

Se tiene un sistema de conductores en forma de bloques prismáticos cuadrados de lado $L = 20\,\mathrm{cm}$ de lado y grosor $b = 1\,\mathrm{cm}$. Estos bloques se sitúan paralelamente de forma que entre el primero y el segundo hay un espacio 3*a*; entre el 2º y el 3º hay 2*a* y entre el 3º y el 4º hay *a*, siendo $a = 1\,\mathrm{mm}$. El espacio entre los conductores está lleno de un dieléctrico ideal de permitividad $\varepsilon = 30\,\mathrm{pF/m}$.

El conductor 1 y el 4 se encuentran permanentemente a tierra.



Inicialmente el interruptor se encuentra en la posición A, de forma que el conductor 2 se encuentra a un potencial $V_0 = 125\,\mathrm{V}$ $, mientras que el 3 está aislado y descargado.

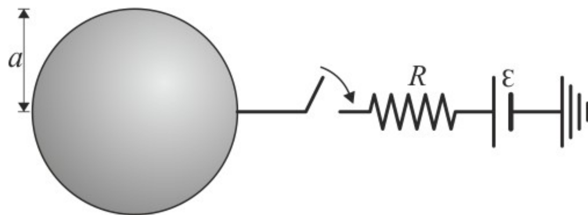
1. Calcule el potencial del conductor 3, así como las cargas netas en cada uno de los cuatro conductores.
2. Halle el campo eléctrico en cada uno de los espacios entre conductores, y las cargas almacenadas en cada una de las superficies conductoras
3. Suponga que bruscamente se pasa el interruptor de la posición A a la B, conectando los conductores 2 y 3, ¿cómo quedan en ese caso las cargas y potenciales de los diferentes conductores, así como las cargas de cada una de las superficies?
4. Halle la energía almacenada en el sistema antes y después de mover el interruptor.

¿Cuánta energía se disipa en el proceso?, ¿cómo puede haber desaparecido esta energía?

2 Problemas adicionales

2.1 Esfera que se conecta a una fuente de tensión

Un conductor metálico esférico de radio 90 cm se encuentra cargado con una carga $Q_1 = 10\,\mathrm{nC}$. Alrededor de la esfera no hay más conductores ni cargas.



1. Halle el potencial al que se encuentra la esfera, así como la energía electrostática almacenada en el sistema.
2. Suponga que ahora se conecta a la esfera una fuente de tensión de 0.3 kV, mediante un cable con una resistencia de 100 Ω. Justo tras la conexión, ¿cuánto vale la corriente que circula por el cable? ¿Está aumentando o disminuyendo la carga de la esfera?

3. Una vez que se ha alcanzado de nuevo el equilibrio electrostático de la esfera, ¿cuál es su nueva carga? ¿Y la nueva energía almacenada en el sistema?
4. ¿Qué trabajo ha realizado la fuente de tensión en el proceso? ¿Cuánta energía se ha disipado en la resistencia?
5. Determine la ecuación diferencial que gobierna el potencial $V(t)$ de la esfera desde que se conecta la fuente hasta que se llega de nuevo al equilibrio electrostático. Indique como sería la representación gráfica de $V(t)$ frente al tiempo.

Dato: $1/(4\pi\varepsilon_0) = 9\times 10^9\,\mathrm{m/F}$

2.2 Carga en el interior de una corona esférica

Se tiene un conductor metálico en forma de corona esférica de radio interior $a = 12\,\mathrm{cm}$y exterior $b = 24\,\mathrm{cm}$. En el centro de la cavidad esférica se encuentra una carga puntual $q = 18\,\mathrm{nC}$. Calcule:

1. La carga en cada uno de las superficies del conductor.
2. El potencial al que se encuentra la carga y el conductor
3. El campo eléctrico en el exterior de la esfera y en la cavidad.
4. La energía electrostática almacenada.

para los siguientes cuatro casos:

- La corona esférica está conectada a tierra.
- La corona está aislada y descargada.

- La corona está conecta a una fuente de tensión que fija un voltaje $V_0 = -12\,\mathrm{V}$.
- La corona está aislada y almacena una carga $Q_0 = -36\,\mathrm{nC}$.

2.3 Esfera rodeada de corona esférica

Se tiene una esfera conductora de radio a que almacena una carga Q_0. Rodeándola se halla una corona esférica también conductora de radio interior $2a$ y exterior $4a$. Esta corona se halla inicialmente aislada y descargada.

1. Calcule el campo eléctrico en todos los puntos del espacio. Puede suponerse que las distribuciones de carga son todas uniformes.
2. Determine el potencial al que se encuentra la esfera interior.
3. Calcule la energía electrostática almacenada en el sistema.
4. Suponga que se conecta la corteza exterior a tierra. Una vez que se vuelve al equilibrio electrostático, ¿cómo cambia el potencial de la esfera interior y la energía almacenada? ¿A qué se debe la diferencia de energía?

2.4 Condensador plano de placas circulares

Se construye un condensador plano situando paralelamente dos discos conductores de 26 cm de diámetro a una distancia de 0.4 mm, entre los cuales hay aire (equivalente al vacío). Halle la capacidad del condensador y la carga y energía que almacena cuando la diferencia de potencial entre placas es de 5 V.

Suponga que rellenando el espacio entre las placas se coloca un disco dieléctrico de permitividad relativa $\varepsilon_r = 2$. ¿Cuánto vale en ese caso la capacidad y la carga y energía almacenadas?

2.5 Cuatro placas conductoras paralelas

Se colocan paralelamente cuatro placas metálicas cuadradas de 20 cm de lado y espesor despreciable, estando la primera separada de la segunda una distancia de 0.2 mm, ésta de la tercera 0.4 mm, y esta de la cuarta 0.6 mm. Las dos placas centrales están aisladas y descargadas. Se coloca la primera placa a 100 V y la última a tierra. Halle el voltaje y la carga de cada placa, así como la energía almacenada.

Sin descargar las placas se desconecta la fuente de tensión. A continuación se conecta por un hilo metálico la segunda con la tercera placa. Halle las nuevas cargas, voltajes y energía almacenada.

¿Cómo cambian los resultados se conectan las placas centrales sin desconectar previamente la fuente de tensión? ¿Qué trabajo realiza la fuente en este caso?

2.6 Condensador que se rellena parcialmente de dieléctrico

El espacio entre dos placas metálicas circulares de 26 cm de diámetro, situadas paralelamente a una distancia 3 mm está vacío.

Entre las placas se establece una diferencia de potencial de 20 V

1. ¿Cuánto vale la energía almacenada en el sistema?
2. Suponga que, una vez cargado el condensador se desconecta la fuente y se introduce entre las placas una lámina de metacrilato ($\varepsilon_r = 3.3$) de 2 mm de espesor. ¿Cuánto cambia la energía almacenada en el sistema? ¿Cómo se explica la diferencia?
3. Suponiendo que el proceso anterior se hubiera efectuado sin desconectar la fuente, ¿cuál sería en ese caso la variación en la energía? ¿Cuánto trabajo realizaría la fuente de tensión?

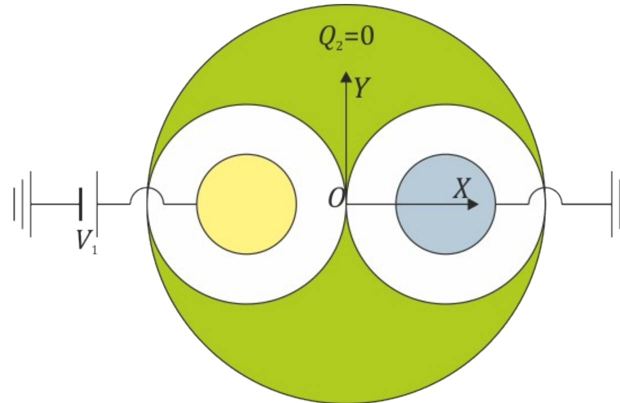
2.7 Capacidad de la tierra y la ionosfera

La tierra y la ionosfera pueden considerarse que forman un condensador esférico. Si el radio de la tierra es de aproximadamente 6400 km y la ionosfera está a 100 km de altura, ¿cuánto vale la capacidad de este condensador?

2.8 Sistema con tres conductores esféricos

En una esfera metálica de radio 36 mm se han hecho dos cavidades, también esféricas, de radio 18 mm. Concéntricas con cada una de estos

huecos se hallan sendas esferas metálicas de radio 9 mm. No hay más conductores en el sistema. Suponga que la esfera exterior se encuentra aislada y descargada; una de las esferas interiores se encuentra a un potencial 8 kV y la otra se encuentra a tierra.



1. ¿Cuál es la carga en cada conductor? ¿Y el potencial?
2. Halle la energía almacenada en el sistema.
3. Si tomamos como eje OX el que pasa por los tres centros y origen O el centro del sistema, calcule el módulo del campo eléctrico en las siguientes posiciones

x (mm)	$\left\|\vec{E}\right\|$
−16	
−8	
+8	
+16	
+24	
+28	

2.9 Dos esferas conductoras dentro de otra

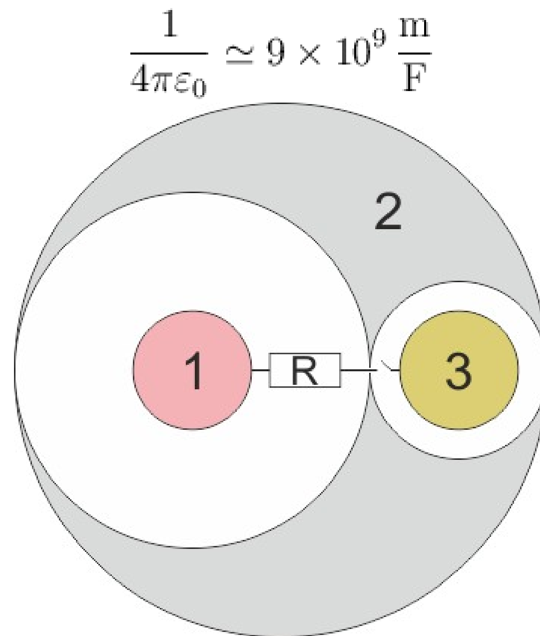
Se tiene un sistema de tres conductores esféricos. Uno de ellos (“2”) es una esfera de radio 54 mm con dos huecos esféricos, de radios 36 mm y 18 mm. En el centro de cada hueco se encuentran sendas esferas metálicas de radio 12 mm, siendo “1” la que está en el hueco grande y “3” la que está en el pequeño. Entre las esferas hay vacío y no hay más conductores ni cargas en el sistema.

Inicialmente la esfera “1” contiene una carga 120 nC mientras que los otros dos conductores están aislados y descargados.

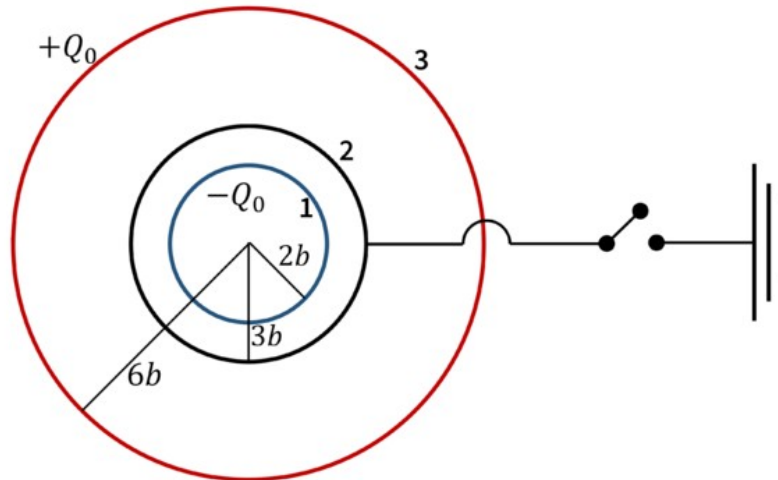
1. Halle el potencial de cada conductor, así como la energía almacenada en el sistema.
2. Se conectan las dos esferas interiores mediante un hilo de resistencia 1 kΩ. Una vez que se ha vuelto a alcanzar el estado final, ¿cuáles son los nuevos potenciales de los conductores?
3. ¿Cuál es la nueva energía almacenada? ¿Cuánta energía se ha disipado en la resistencia?
4. Halle la potencia instantánea disipada en el cable justo tras la conexión.

Tómese

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \simeq 9\times 10^9\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{F}}$$



==Tres superficies conductoras concéntricas Se tiene un sistema formado por tres superficies conductoras esféricas concéntricas, de radios $2b$, $3b$ y $6b$. Inicialmente la esfera interior almacena una carga $-Q_0$, la intermedia está aislada y descargada y la exterior almacena una carga $+Q_0$.



1. Calcule el potencial al que se encuentra cada esfera.
2. Halle el campo eléctrico en los puntos del eje OZ siguientes: $z = 0$, $z = 5b/2$, $z = 4b$ y $z = 8b$, siendo el origen de coordenadas el centro de las esferas.
3. Halle la energía almacenada en el sistema

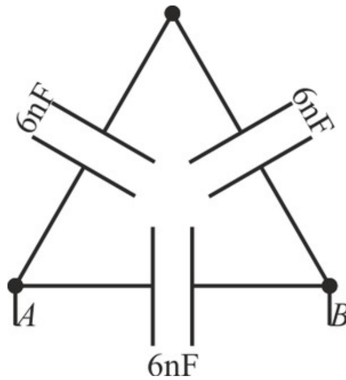
En un momento dado se cierra el interruptor que conecta la esfera intermedia a tierra. Una vez que se alcanza de nuevo el equilibrio electrostático:

4. ¿Cuáles son las nuevas cargas y potenciales de los tres conductores?
5. ¿Cuánto vale ahora el campo eléctrico en los puntos del apartado 2?
6. ¿Cuánto vale la energía almacenada en el sistema?
7. ¿Cuánta energía se ha perdido en el proceso?

3 Preguntas de test

3.1 Asociación de tres condensadores

Dado el sistema de tres condensadores de la figura,



¿cuánto vale la capacidad equivalente entre A y B?

- **A** 2 nF.
- **B** 9 nF.
- **C** 4 nF.
- **D** 18 nF.

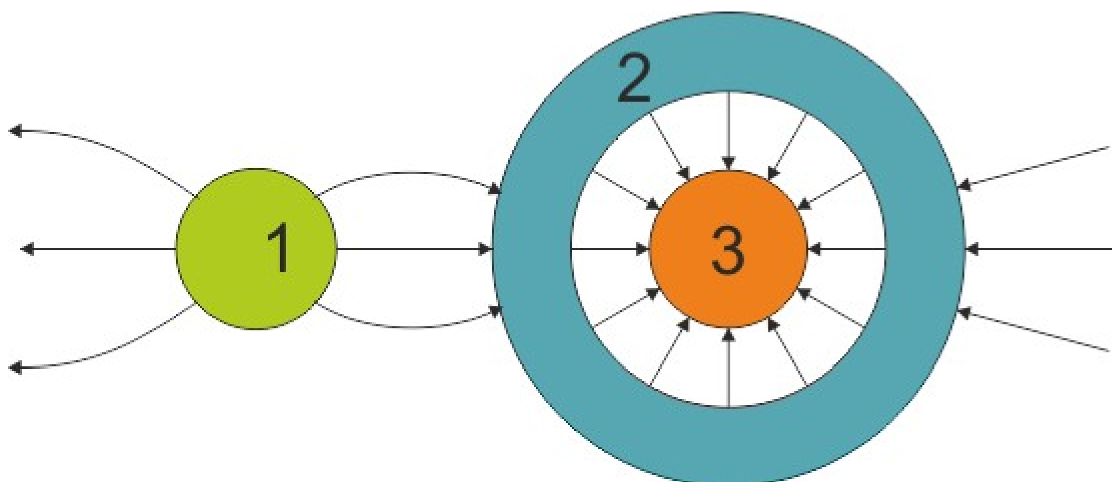
3.2 Reparto de carga entre dos esferas

Dos esferas metálicas de 30 cm y 10 cm de radio están muy alejadas. La primera tiene una carga de 10 nC y la segunda está descargada. Se conectan por un hilo metálico. ¿Cómo se reparte la carga entre la grande y la pequeña?

- **A** 50% - 50%
- **B** 90% - 10%
- **C** 75% - 25%
- **D** 100% - 0%

3.3 Sistema de tres conductores

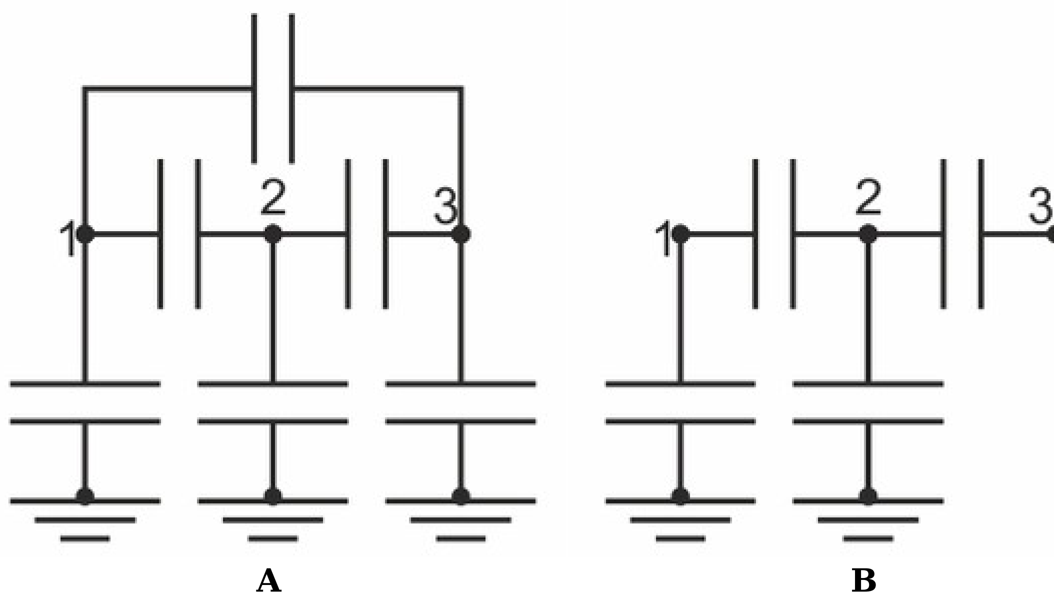
Se tiene el sistema de conductores en equilibrio electrostático de la figura, en la que se han indicado algunas de las líneas de campo eléctrico



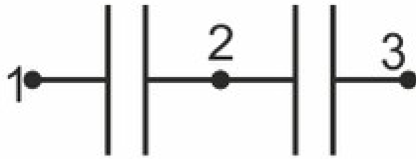
¿Qué podemos decir de los potenciales de cada conductor (tomando como origen de potencial el infinito)?

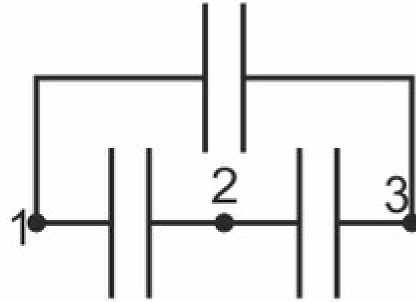
- **A** $V_1 > V_2 > 0 > V_3$
- **B** Tal situación es imposible.
- **C** $V_1 > 0 > V_2 > V_3$
- **D** $V_1 > V_2 > V_3 > 0$

¿Cómo sería el sistema de condensadores que representa a este sistema de conductores?



A **B**





C **D**

3.4 Condensador con dieléctrico

Se tiene un condensador plano formado por dos placas circulares de radio 10 cm separadas una distancia de 1 mm. Entre ellas hay una lámina de dieléctrico de permitividad $\varepsilon = 2\varepsilon_0$. La lámina llena todo el espacio entre las placas. Se aplica entre las placas una diferencia de potencial de 100 V

¿Cuánto vale la energía almacenada en el sistema?

- **A** 2.78 µJ.
- **B** 0.556 nJ.
- **C** 1.39 µJ.
- **D** 5.56 µJ.

Sin desconectar la fuente se retira la lámina de dieléctrico. En este proceso la energía almacenada...

- **A** aumenta al cuádruple.
- **B** aumenta al doble.
- **C** se reduce a la mitad.
- **D** se queda igual.

3.5 Condensador relleno de papel

Se construye un condensador plano colocando horizontalmente un disco de radio 10 cm, sobre él una hoja de papel de 0.1 mm de espesor con

permitividad $\varepsilon_r = 3.0$ y sobre ésta se apoya otro disco metálico del mismo radio.

¿Cuánto vale la capacidad del condensador resultante?

- **A** 0.085 pF.
- **B** 8.34 nF.
- **C** 2.78 nF.
- **D** 26.6 nF.

La placa superior se eleva una distancia de 0.1 mm, separándola del papel, ¿cuánto vale la nueva capacidad del condensador?

- **A** 4.17 nF.
- **B** 11.12 nF
- **C** 2.09 nF.
- **D** 16.7 nF

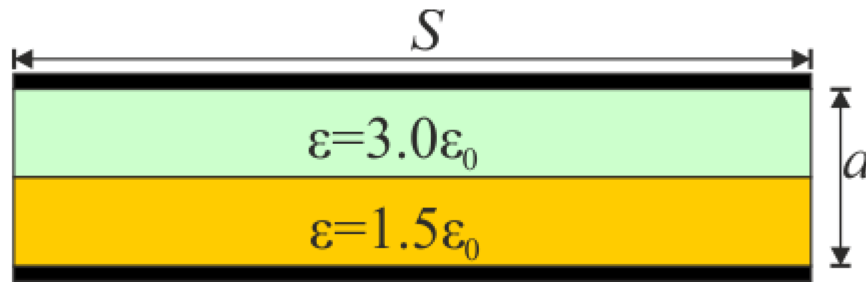
3.6 Carga frente a esfera

Una esfera conductora se encuentra conectada a tierra. Frente a ella se coloca una carga puntual positiva. ¿Como son el potencial y la carga de la esfera?

- **A** $V = 0$ y $Q < 0$
- **B** $V = 0$ y $Q = 0$
- **C** $V > 0$ y $Q = 0$
- **D** $V > 0$ y $Q > 0$

3.7 Dieléctrico con dos capas

Se tiene el condensador de la figura, formado por dos placas conductoras paralelas de sección S y distancia entre placas a. Entre ellas la mitad del espacio está ocupado por un dieléctrico ideal de permitividad relativa 1.5 y la otra mitad por uno de permitividad 3.0, siendo la frontera paralela a las placas. La capacidad del condensador en vacío en ausencia de los dieléctricos es C_0.



¿Cuánto vale la capacidad de este condensador?

- **A** $C = 4.5C_0$
- **B** $C = 2.25C_0$
- **C** $C = 0.5C_0$
- **D** $C = 2.0C_0$

Suponga que este condensador se conecta a una fuente de tensión V_0. Si E_1 es el campo en el material de permitividad 1.5 y E_2 en el de permitividad 3.0, ¿cómo se relacionan estos dos campos?

- **A** Puede darse cualquiera de las otras tres posibilidades.
- **B** $E_1 > E_2$
- **C** $E_1 < E_2$
- **D** $E_1 = E_2$

3.8 Dos conductores enfrentados

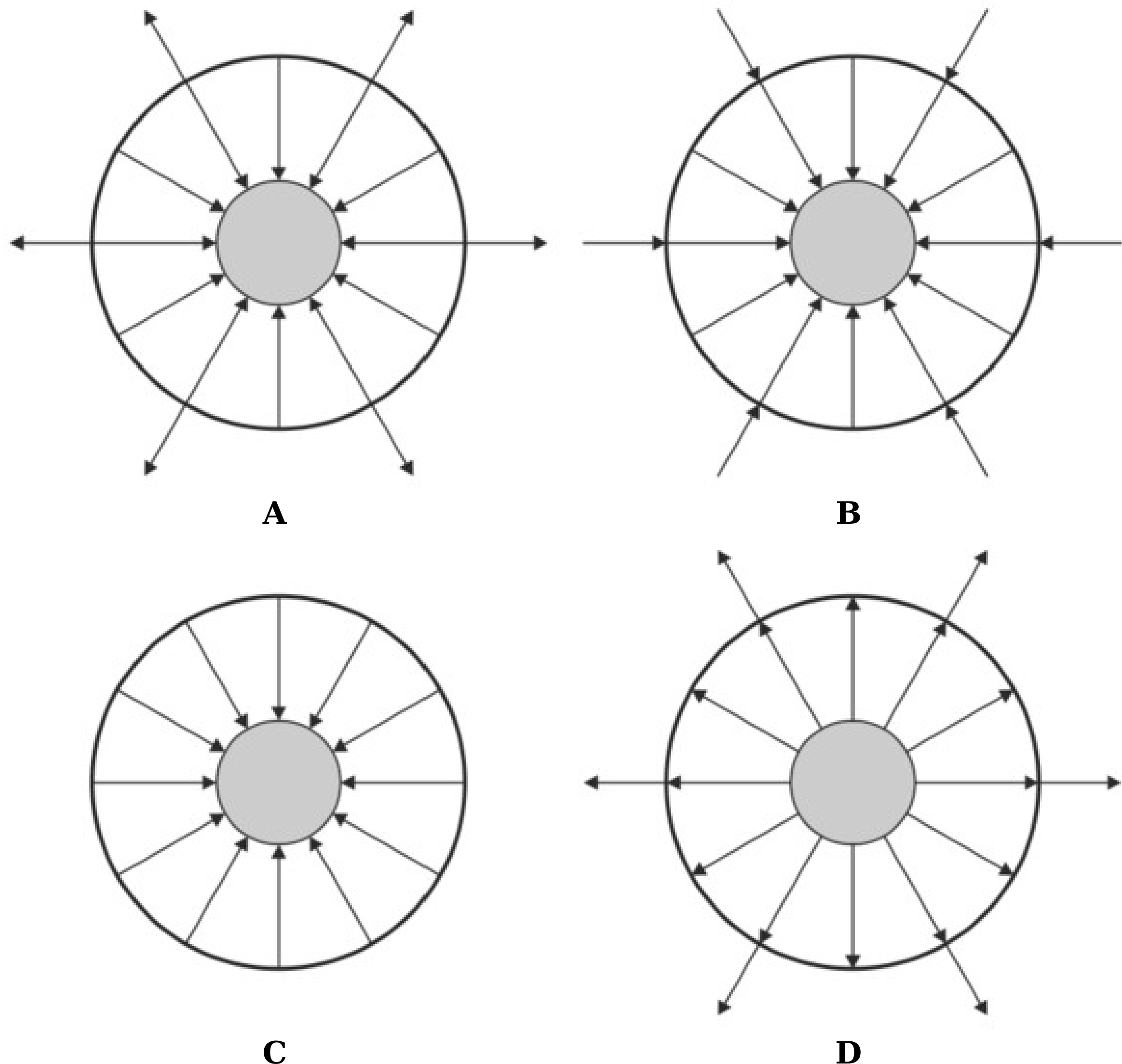
Se colocan dos conductores uno frente al otro. El primero tiene $Q_1 > 0$ y el segundo $Q_2 = 0$. No hay más cargas ni conductores en el sistema. ¿Qué podemos decir de sus potenciales?

- **A** $V_1 > 0$, $V_2 < 0$.
- **B** $V_1 > 0$, $V_2 > 0$.
- **C** $V_1 = 0$, $V_2 < 0$.
- **D** $V_1 > 0$, $V_2 = 0$.

3.9 Dos superficies esféricas

Se tienen dos superficies conductoras esféricas concéntricas, de radios 1 cm y 3 cm, respectivamente. Inicialmente la interior (1) almacena una carga de − 40 nC y la exterior (2) una de +20 nC.

¿Cuál de las siguientes figuras describe adecuadamente el campo eléctrico en el sistema?



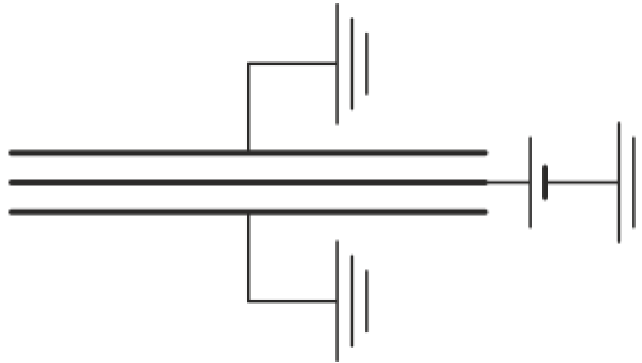
Se conectan las dos esferas por un cable. Una vez que se alcanza el equilibrio electrostático, ¿cómo queda el reparto de cargas entre las dos?

- **A** $Q_1 = -2\,\mathrm{nC}$, $Q_2 = -18\,\mathrm{nC}$
- **B** $Q_1 = -5\,\mathrm{nC}$, $Q_2 = -15\,\mathrm{nC}$
- **C** $Q_1 = 0\,\mathrm{nC}$, $Q_2 = -20\,\mathrm{nC}$
- **D** $Q_1 = -10\,\mathrm{nC}$, $Q_2 = -10\,\mathrm{nC}$

3.10 Tres placas circulares

Tres placas conductoras circulares de radio 12 cm se encuentran situadas paralelamente con una distancia de 1 mm entre ellas. El

espacio intermedio está vacío. La placa central se encuentra a un potencial de 100 V, mientras que las exteriores están puestas a tierra.



La energía electrostática almacenada en el sistema vale…

- **A** 4 µJ
- **B** 8 µJ
- **C** 2 µJ
- **D** 1 µJ

3.11 Comparación de dos condensadores

Se tienen dos condensadores planos de las mismas dimensiones (sección y espesor). El 1 está relleno de un dieléctrico con permitividad relativa 3.0 y el 2 de un dieléctrico con permitividad 1.5. En un momento dado, los dos están cargados con la misma carga Q_0. ¿En cuál de ellos es mayor el campo eléctrico interior?

- **A** En el 2.
- **B** Vale lo mismo en los dos.
- **C** En el 1.
- **D** No hay suficiente información para saberlo.

1 Equilibrio electrostático

La propiedad básica de los materiales conductores en electrostática es el estado de *equilibrio electrostático*. Este estado es aquel en que las cargas del conductor no se mueven, aunque podrían hacerlo. Si no se mueven es porque se encuentran en equilibrio y la fuerza sobre cada una de ellas es nula.

El proceso por el cual un conductor llega al equilibrio electrostático es el siguiente:

Cuando se tiene un material conductor, como puede ser una disolución salina o un metal, y se aplica un campo eléctrico externo, aparece una fuerza sobre las cargas positivas en un sentido y sobre las cargas negativas en el opuesto.

$$\vec{F} = q\vec{E}_{\text{aplicado}}$$

Dado que lo que caracteriza a un material conductor es que permite el movimiento de cargas por su interior, el resultado es una separación entre las cargas, las positivas a un lado y las negativas a otro.

Ahora bien, en el momento en que las cargas se separan y surgen densidades de carga opuestas, aparece un campo eléctrico adicional debido a las propias cargas del conductor, de forma que ahora la fuerza sobre cada carga del material es

$$\vec{F} = q(\vec{E}_{\text{aplicado}} + \vec{E}_{\text{propio}})$$

Este campo propio va en sentido opuesto al aplicado, por lo que la fuerza se reduce.

El proceso de separación de carga se detiene cuando el campo propio anula completamente al campo aplicado.

$$\vec{E} = \vec{E}_{\text{aplicado}} + \vec{E}_{\text{propio}} = \vec{0}$$

A partir de ese momento ya no hay más separación de carga y el sistema se queda en ese estado. Se ha alcanzado el equilibrio electrostático.

Si ahora se modifican las condiciones exteriores (cambiando el campo aplicado) se produce una nueva redistribución de la carga hasta que se llegue a un nuevo estado de equilibrio, en el que las cargas estarán en una posición diferente. El periodo durante el cual las cargas se están moviendo entre equilibrio y equilibrio, se denomina el periodo transitorio y suele ser muy corto en la mayoría de los materiales (microsegundos o menos).

Hay que destacar que la separación de cargas nunca llega, ni de lejos, a mover todas las cargas del material hasta llegar a agotarlas. Dada la intensidad del campo eléctrico de una carga puntual, basta que una pequeñísima fracción de las cargas disponibles se separe para que lleguen a anular el campo aplicado.

En el equilibrio electrostático, las cargas están en reposo y por tanto las expresiones dadas en el tema de electrostática en el vacío siguen siendo válidas. Sin embargo, dado que las cargas de un conductor se redistribuyen continuamente a medida que cambian las condiciones externas, la densidad de carga es desconocida. Puesto que las expresiones que conocemos para el campo y el potencial presuponen que conocemos cómo se distribuyen, nos preguntamos entonces cómo podemos hallar el campo o el potencial eléctrico. Este es el denominado problema del potencial que veremos más adelante.

2 Propiedades de un conductor en equilibrio electrostático

Un conductor en equilibrio electrostático se caracteriza porque en él las cargas se encuentran en reposo, aunque tendrían la posibilidad de moverse. Esto implica una larga serie de propiedades:

El campo eléctrico en el material conductor es nulo

Si no fuera así, habría fuerza sobre las cargas y estas se moverían.

$$\vec{E}=\vec{0}$$

El potencial eléctrico en todos los puntos del conductor tiene el mismo valor

Basta tomar dos puntos A y B del conductor e integrar a lo largo de un camino que vaya íntegramente por el conductor

$$V_A - V_B = \int_A^B \overbrace{\vec{E}}^{=\vec{0}} \cdot\mathrm{d}\vec{r} = 0$$

La superficie del conductor es una superficie equipotencial

Es un caso particular de la propiedad anterior.

No puede haber líneas de campo que salgan del conductor y acaben en él

El campo eléctrico siempre va de mayor a menor potencial. Si hubiera una línea que parte de un conductor y acaba en sí mismo, querría decir que un punto de la superficie está a un potencial superior a otro. Pero esto no es posible, ya que la superficie es equipotencial. Por tanto, no puede existir tal línea de campo. Esto es cierto tanto si consideramos una línea directa, como una que pasa antes por otro sitio (por ejemplo, no puede haber una línea que vaya del conductor 1 al 2 y simultáneamente otra del 2 al 1).

La densidad volumétrica de carga es nula

Consideremos una superficie cerrada S cuyo volumen interior se encuentra totalmente en el material. Al aplicar la ley de Gauss

$$Q_{\mathrm{int}} = \varepsilon_0 \oint_S \overbrace{\vec{E}}^{=\vec{0}} \cdot\mathrm{d}\vec{S} = 0$$

y puesto que esto es cierto para cualquier superficie cerrada de este tipo, la conclusión es que no puede haber densidad de carga de volumen

$$\rho = 0$$

Esto no quiere decir que un conductor no pueda estar cargado, solo que esta carga no está repartida por el volumen.

Toda la carga del conductor está en su superficie

Ya que no puede haber una densidad volumétrica, toda carga que haya estará en la superficie (técnicamente, en una fina capa de varios nanómetros de espesor). Esto es así incluso en un conductor que tenga carga nula, ya que al decir que un conductor está descargado nos referimos siempre a la carga total. Puesto que un conductor está formado por billones de cargas positivas y negativas, es posible (de hecho, lo habitual) que haya una densidad de carga positiva en una parte de la superficie y negativa en otra. Esto es lo que ocurre, por ejemplo, si sobre un conductor descargado aplicamos un campo externo.

El campo eléctrico justo fuera del conductor es perpendicular a la superficie

El campo eléctrico se anula dentro del conductor, pero no fuera de él. El campo exterior es una superposición del aplicado y del debido a las cargas del propio conductor (que también producen campo en el exterior). Puesto que la superficie del conductor es equipotencial, el campo eléctrico justo fuera del conductor es perpendicular a la superficie (ya que siempre es ortogonal a las equipotenciales).

El módulo del campo exterior es proporcional a la densidad de carga superficial

Siempre que tenemos una densidad de carga superficial (como en los ejemplos del disco, el plano o los planos cargados o la superficie esférica cargada) se produce un salto en el campo eléctrico, que depende de cuánta carga haya en la superficie. El salto es igual en todos los casos a σ_s/ε_0. Teniendo en cuenta que en el interior del material el campo es nulo y que por la propiedad anterior el campo es perpendicular a la superficie, queda la expresión para el campo exterior

$$\vec{E} = \frac{\sigma_s}{\varepsilon_0}\vec{n}$$

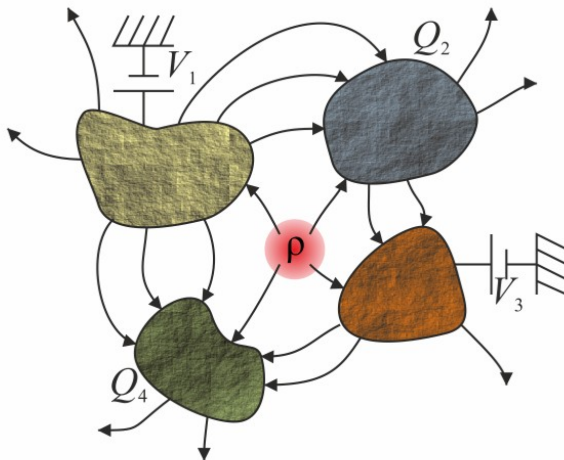
Este campo va hacia afuera del conductor donde la densidad de carga es positiva y hacia adentro donde es negativa (ya que $\vec{n}$ es siempre la normal hacia el exterior).

Esta última propiedad parece sugerir que no se cumple el principio de superposición, ya que si ahora a cercamos una carga puntual, ¿no sería el campo ($(\sigma_s/\varepsilon_0)\vec{n} + \vec{E}_q$ es decir, la suma del que ya había más el de la carga? No, sigue siendo igual a ($(\sigma_s/\varepsilon_0)\vec{n}$. Lo que ocurre es que si acercamos una carga, las cargas del conductor se redistribuyen y σ_s cambia. Es decir, esta ecuación relaciona el campo en la superficie con la densidad superficial de carga, pero no nos dice cuánto vale cada una de las cantidades. La densidad de carga en un conductor también es una incógnita del problema.

3 Problema del potencial

Si las densidades de carga en los conductores son variables y desconocidas, ¿cómo puede hallarse el campo eléctrico que producen?

3.1 Planteamiento del problema



La forma de hacerlo es resolviendo el llamado *problema del potencial*, cuyo planteamiento sería aproximadamente el siguiente: tenemos un conjunto de conductores de forma arbitraria, entre los cuales se encuentra el vacío (en el cual puede haber una densidad conocida de carga, ρ); cada uno de los conductores se encuentra a un voltaje fijado por respectivas fuentes de tensión. Se trata de hallar la distribución de potencial eléctrico entre los conductores.

De hecho, puede hallarse el potencial en todos los puntos del espacio, pero en los propios conductores es trivial (el potencial en cada uno vale el potencial fijado por cada fuente), por lo que el problema se reduce a hallar el potencial entre los conductores.

Matemáticamente este es un problema de ecuaciones diferenciales, consistente en resolver la llamada ecuación de Poisson

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

con la condición de que el potencial en la superficie de cada conductor es conocido.

$$V=V_i \qquad (\vec{r}\in S_i)$$

y, si el sistema es ilimitado, de que el potencial se anula en el infinito

$$V\to 0 \qquad (|\vec{r}|\to\infty)$$

En esta introducción no veremos nada de cómo se plantea y se resuelve esta ecuación (tema que da para libros y cursos enteros), pero sí un resultado esencial de la teoría del potencial:

Teorema de existencia y unicidad

El problema del potencial posee solución y ésta es única.

¿Por qué esta propiedad es importante? Porque primero nos garantiza que hay solución (aunque no se pueda hallar analíticamente) pero además nos dice que es única. Por tanto, cualquier método vale para hallarla, incluyendo la inspiración o la analogía con problemas similares. Si una solución propuesta cumple la ecuación diferencial y las condiciones para el potencial en la superficie de cada conductor, es la solución, porque no hay otra.

Así, por ejemplo, para resolver el problema del campo alrededor de una esfera conductora de radio a a potencial V_0 debemos imponer que se cumple la ecuación anterior con la condición de que en $r = a$ el potencial tiene el valor dado. Recordando los problemas de potenciales creados por distribuciones de carga, podemos ver que el potencial debido a una superficie esférica uniformemente cargada satisface tanto la ecuación como la condición para el potencial en la superficie de la esfera, y por tanto, es la solución del problema, sin necesidad de hacer ningún cálculo adicional.

El problema del potencial es extremadamente general ya que se aplica a cualquier conjunto de conductores de forma arbitraria, con lo que lo mismo vale para estudiar el campo alrededor de un avión volando que para fabricar un condensador de un ordenador, pasando por una gran variedad de situaciones intermedias.

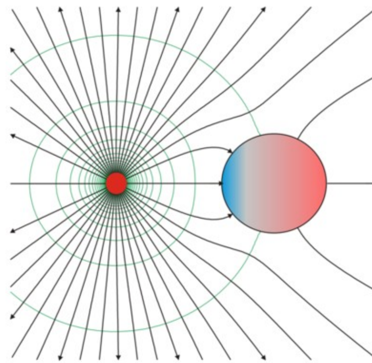
Antes de comentar algunos casos concretos, conviene hacer una precisión sobre los datos del problema del potencial. Antes se dijo que los voltajes de cada uno de los conductores era conocido. Esto no siempre es así. Hay muchas situaciones en que el dato es la carga total del conductor. Tenemos entonces dos posibilidades:

Conductor aislado o a carga constante

Es aquél que no tiene ninguna conexión con fuente alguna ni con tierra (en los esquemas, que no hay ningún hilo que llegue a él). En un conductor aislado la carga

total permanece constante (ya que no puede irse a ningún sitio), aunque su distribución es cambiante, dependiendo de las circunstancias externas. En este caso, podemos afirmar que el potencial tiene el mismo valor en todos los puntos, aunque no sepamos cuanto vale y que conocemos la carga total. Caso particular importante es el de un conductor *aislado y descargado*, en el cual no solo sabemos que la carga es constante, sino que además $Q = 0$.

Así, si tenemos una esfera aislada y descargada ($Q = 0$) a la cual se aproxima una carga puntual +q, esta carga atrae a las cargas negativas de la esfera metálica, que se acumulan por el lado de la carga q. Ahora bien, puesto que la carga de la esfera es nula y no puede cambiar, estas cargas negativas acumuladas proceden de átomos de la propia esfera, que por tanto quedan cargados positivamente. Aparece entonces una acumulación de carga positiva en el lado opuesto del conductor (también, si las cargas positivas pueden moverse, porque se alejan repelidas por la carga +q).

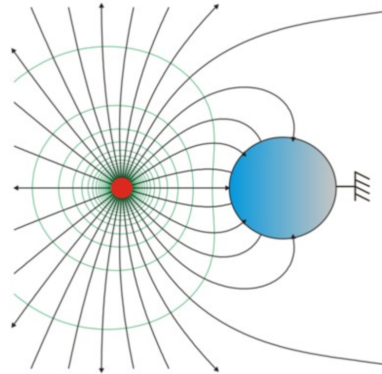


Esta carga positiva acumulada implica que por ese lado del conductor las líneas de campo van hacia afuera. Dado que no pueden volver al propio conductor ni llegar a la carga +q (en ambos casos se cerraría un ciclo), deben ir al infinito. Por tanto, el potencial de la esfera es positvo, aunque su carga es nula.

Conductor a potencial constante

Es aquel que está conectado a una fuente de tensión que fija su potencial en un valor fijado. La fuente hace esto metiendo o sacando cargas del conductor (del mismo modo que una bomba mete agua en un depósito para mantener su nivel). Esto quiere decir que no sabemos cuanta carga hay en el conductor, ya que ésta depende de las circunstancias externas. Entre las fuentes de potencial está la *tierra* o *masa*, que no es una verdadera fuente (en el sentido de una pila o batería) sino una conexión a un conductor gigantesco situado al potencial que tomamos como 0. Cuando un conductor está conectado a tierra su voltaje es 0 y pueden llegar o salir de él todas las cargas que sean necesarias para mantener este voltaje.

Supongamos ahora una esfera puesta a tierra (V=0) a la cual se aproxima una carga puntual +q. De nuevo se produce una acumulación de carga negativa en las proximidades de la nueva carga, pero ahora estas cargas pueden provenir de la tierra, a través del cable de conexión.



Por otro lado, puesto que el potencial de la esfera es el mismo que el del infinito, no puede haber líneas de campo que salgan de ella y acaben en el infinito (ni en la propia esfera, ni hacia la carga +q). Por tanto, no hay líneas de campo que salgan de la esfera. Solo las hay que lleguen a ella. Por consiguiente, la carga de la esfera es negativa (aunque su potencial sea nulo).

Según esto, al plantear el problema, o conocemos la carga total del conductor, o conocemos su potencial, pero nunca ambas cosas. Una vez resuelto el problema, sí podemos emplear la solución para hallar la cantidad que no conocíamos al principio.

Es importante por tanto no confundir conductor descargado con conductor a tierra.

- Un conductor está descargado cuando está aislado y su carga total es $Q = 0$, pero su potencial puede tener cualquier valor, positivo o negativo, dependiendo de si hay otros conductores o cargas en el sistema.
-
- Un conductor está a tierra si su voltaje es el mismo que el del origen de potencial, $V = 0$, pero su carga puede ser cualquiera, dependiendo del resto del sistema

$$\begin{cases} Q=0 & \not\Rightarrow & V=0 \\ V=0 & \not\Rightarrow & Q=0 \end{cases}$$

A continuación se describen algunas propiedades generales de soluciones de problemas del potencial, que también se ilustran en la sección de problemas.

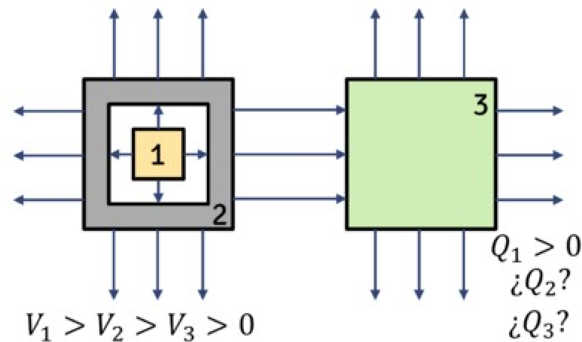
3.2 Líneas de campo en un sistema de conductores

La condición de que las líneas de campo no pueden partir de un conductor y acabar en e mismo conductor se extiende a un sistema de conductores. Las líneas de campo electrostático siempre van de mayor a menor potencial, por lo que nunca se puede obtener un lazo cerrado, ni siquiera

pasando por varios conductores. Esto permite obtener un ordenamiento en los voltajes respectivos. Habrá un conductor que estará al máximo de potencial y, a partir de ahí, las líneas de campo irán de un conductor a otro, siempre en voltajes descendentes.

El infinito (o una carcasa exterior a tierra, si la hubiera) se incluye como un conductor adicional. Si las líneas de un conductor van hacia el infinito quiere decir que el potencial de ese conductor es positivo. Si llegan desde el infinito al conductor, el voltaje será negativo.

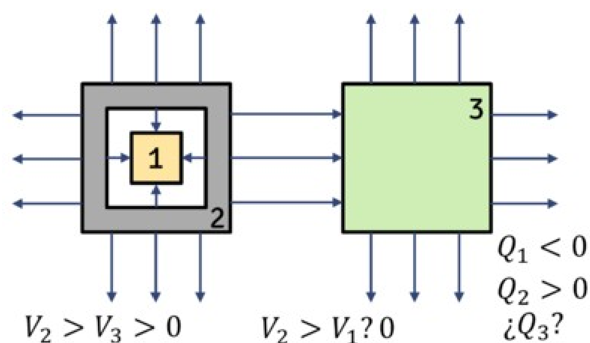
Por ejemplo, consideremos el sistema esquematizado en la figura siguiente:



El trazado es esquemático ya que las líneas de campo serán curvas, no rectas. En cuanto al sentido de estas líneas, nos dice que se cumple el orden $V_1 > V_2 > V_3 > 0$

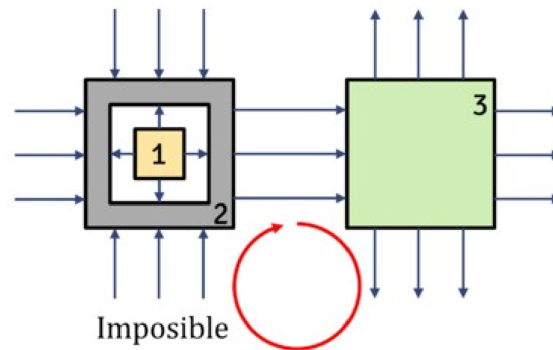
En cuanto a las cargas, la del conductor 1 es positiva, ya que todas las líneas de campo van hacia afuera del conductor, pero desconocemos el signo de la carga del conductor y del 3, ya que hay tanto líneas que entran como líneas que salen.

Si ahora consideramos el caso esquematizado en la figura siguiente:



Tenemos que se verifica $V_2 > V_3 > 0$ y $V2 > V_1$ pero no podemos asegurar que el potencial del conductor 1 sea mayor o menor que 0, ya que no hay líneas que vayan a o vuelvan del infinito al conductor. En cuanto a la carga del conductor 1 es negativa, la del dos es positiva y la del 3 es incierta.

Por último, el caso



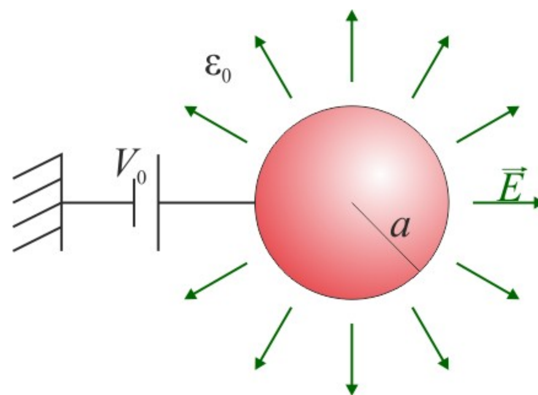
es imposible, pues tenemos un bucle cerrado que va del conductor 2 al 3, del 3 al infinito y del infinito al 2.

3.3 Capacidad de un conductor

Cuando se tiene un solo conductor y nada más (ni más conductores, ni más cargas, ni campos aplicados), la cantidad de carga que almacena es proporcional al voltaje al que se encuentra respecto al infinito (que sería el origen de potencial). Si está a un 1 V almacena una carga Q_0, si está a 2 V, el doble. Si está a −1 V tiene una carga negativa $-Q_0$. Esta relación de proporcionalidad se expresa

$$Q = CV$$

siendo C la capacidad del conductor. Esta capacidad se mide en faradios (1F = 1C/V). La capacidad de un conductor es una propiedad geométrica, que no depende del voltaje al que se encuentre, solo de la forma del conductor.



Para el caso de un conductor esférico de radio a

$$C = 4\pi\varepsilon_0 a$$

Esta capacidad es extremadamente pequeña en la mayoría de los casos. Así, para una esfera del tamaño de la Tierra

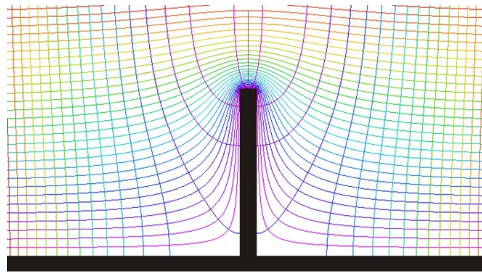
$$a = R_T = 6370\,\mathrm{km} \qquad\qquad C = \frac{6.37\times 10^6}{9\times 10^9}\,\mathrm{F} = 0.7\,\mathrm{mF}$$

Esta relación de proporcionalidad entre Q y V de un conductor se da única y exclusivamente cuando solo tenemos ese conductor. En el caso de que haya más elementos en el sistema, ya no será cierta.

3.4 Efecto punta

Tal como se ve en el ejemplo de la conexión de dos esferas alejadas, si tenemos un conductor cuya superficie tiene una curvatura variable (puede tener una punta en una parte, y ser casi plano en otra), la densidad de carga es mayor donde la curvatura es mayor, es decir, en las puntas.

Esto se puede entender gráficamente de forma sencilla. Supongamos que tenemos una superficie en la que destaca una protuberancia (como puede ser un árbol, un pararrayos o una persona en un descampado). Puesto que la protuberancia es parte del conductor, se encuentra al mismo potencial que el resto del conductor (por ejemplo, a tierra).



Si ahora hay un campo eléctrico aplicado (como el debido a una nube de tormenta situada a un alto voltaje), en la parte de la protuberancia se produce la misma diferencia de potencial con la nube que en cualquier otro punto, pero sobre una distancia menor. Esto quiere decir que el campo eléctrico ahí es más intenso (ya que su integral sobre una distancia menor nos da la misma d.d.p.). Gráficamente, las superficies equipotenciales están más próximas cerca de la punta. Puesto que el campo en la proximidad de un conductor es proporcional a la densidad superficial de carga, se llega a que esta es mayor en la punta que en el llano.

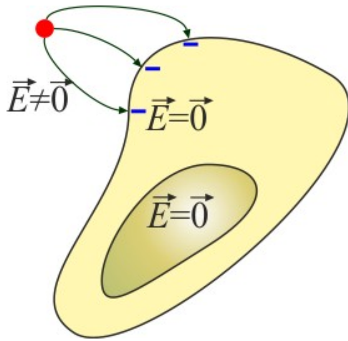


Este *efecto punta* se encuentra en el principio de los pararrayos. Si el campo eléctrico es lo suficientemente intenso en las proximidades de un mástil, es capaz de ionizar el aire que lo

rodea, convirtiendo el aire en un plasma conductor. Cuando se produce la descarga, ésta fluye por un camino conductor, como lo haría por un cable, en este caso, por un “canal” en el aire, que llega hasta el pararrayos. Éste se encuentra conectado a tierra, por lo que la corriente no se detiene en la punta del pararrayos, sino que continúa por este camino distribuyéndose y amortiguándose por la superficie

3.5 Jaula de Faraday

3.5.1 Hueco vacío en un conductor



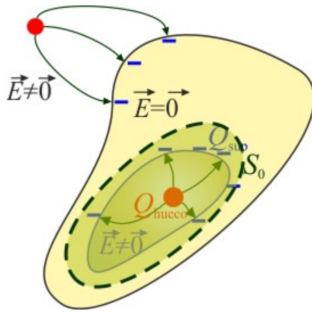
Hemos visto que en un material conductor en equilibrio electrostático el campo eléctrico es nulo, pero que en su exterior no lo es. ¿Qué ocurre si tenemos una cavidad?

Supongamos que un conductor tiene en su interior un hueco absolutamente vacío. En este caso, el campo en el interior del hueco es nulo. Es fácil ver por qué. Si no lo fuera, habría líneas de campo eléctrico en el interior, pero, ¿de donde a donde irían estas líneas de campo? No pueden dar vueltas sobre sí mismas, ni tampoco pueden acabar en la nada, ni salir del conductor y acabar en el mismo conductor. Por tanto, llegamos a la conclusión de que no puede haber líneas de campo ni campo en este hueco.

Este resultado es independiente de lo que haya fuera del conductor, puede haber cargas, un campo aplicado, otros conductores, etc. Su influencia no llega hasta el interior del hueco. Se dice que el hueco está *apantallado* por el conductor.

3.5.2 Teorema de Faraday

Supongamos ahora que tenemos el mismo conductor, con el mismo hueco, pero que ahora ya no está vacío, sino que en el interior hay cargas eléctricas. Puede haber una, o varias, o una distribución continua, otro conductor cargado, etc. En este caso por supuesto que habrá campo eléctrico en el hueco. Si dentro lo que hay es una carga positiva, habrá líneas de campo que salgan de la carga y vayan a parar al conductor. Puesto que el campo entra en el conductor, debe haber una densidad superficial de carga negativa en la pared del hueco. A la inversa si la carga del interior del hueco es negativa.



¿Cuánta carga hay acumulada en la superficie del hueco? Supongamos que envolvemos al hueco con una superficie cerrada S_0 que se halla completamente contenida en el material conductor. De acuerdo con la ley de Gauss

$$\varepsilon_0 \oint_{S_0} \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = Q_{\mathrm{int}}$$

pero, por ser la superficie parte del material conductor el flujo es nulo

$$\varepsilon_0 \oint_{S_0} \overbrace{\vec{E}}^{=\vec{0}} \cdot\mathrm{d}\vec{S} = 0$$

y por tanto la carga encerrada es nula. Esta carga es suma de la que hay dentro del hueco y la que hay en su superficie

$$0 = Q_{\mathrm{int}} = Q_{\mathrm{hueco}} + Q_{\mathrm{sup}} \qquad \Rightarrow \qquad Q_{\mathrm{sup}} = -Q_{\mathrm{hueco}}$$

es decir, en la pared del hueco se induce una carga igual en magnitud y de signo opuesto a la que haya dentro del hueco (*teorema de Faraday*). Esto es independiente de que la carga interior sea una carga puntual o una distribución. La carga de la superficie interior no se reparte uniformemente, sino que tendrá mayor densidad en los puntos más próximos a la carga interior.

¿De dónde sale esta carga que se induce en la superficie del hueco? Depende de si el conductor está aislado o no.

- Si sí lo está, puesto que la carga de un conductor aislado permanece constante, solo puede provenir del propio conductor. Dado que la densidad de carga en un conductor se encuentra siempre en sus superficies, concluimos que debe provenir de la superficie exterior. Unos cuantos electrones se acumulan en la pared del hueco, y esto lo hacen abandonando algunos átomos de la superficie exterior, que por tanto ve aumentada su carga en $-Q_{\mathrm{sup}} = +Q_{\mathrm{hueco}}$.
- Si el conductor está unido a una fuente (o a tierra) esta carga proviene de la fuente, que aporta la carga necesaria para mantener el potencial del conductor.
-

3.5.3 Jaula de Faraday

El resultado anterior se puede generalizar a cualquier conductor con cualquier hueco, con ayuda del teorema de existencia y unicidad.

Si tenemos un conductor a potencial fijado con un hueco en el que puede haber cargas, el campo eléctrico en el interior del hueco depende exclusivamente de la forma del hueco y de las cargas que haya en él. Todo lo que pase fuera (otros conductores, cargas, campos aplicados desde el exterior), es irrelevante, ya que no influye en lo que pase en el hueco. El conductor funciona como una pantalla o blindaje que protege al interior de lo que pase fuera. Se dice que el conductor funciona como una *jaula de Faraday*.

La protección funciona en los dos sentidos. Un observador o carga que se encuentre en el exterior del conductor no se entera en absoluto de la presencia de cargas en el hueco, ni de la propia existencia de éste. El conductor funciona como una pared opaca que apantalla lo que hay dentro de lo que hay fuera y viceversa.

Esta propiedad es muy importante en el diseño de toda clase de aparatos eléctricos y electrónicos, cuya carcasa es siempre una caja metálica puesta a tierra, que funciona como un blindaje. Un ejemplo sencillo lo tenemos en el caso de un cable coaxial como los que se usan para llevar la señal a los televisores. La malla metálica exterior se encuentra a tierra. De esta forma



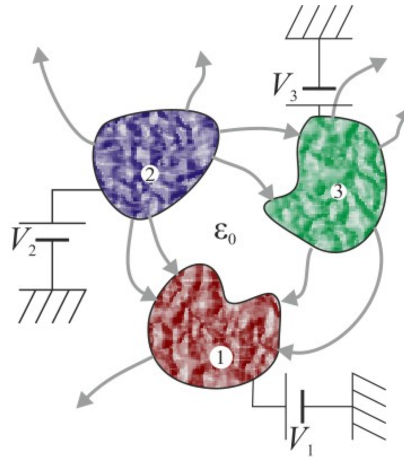
- Se evita que la señal que va por el interior se radie al exterior, perdiendo potencia de la señal.
- Se impide que haya interferencias desde el exterior, que impidan la correcta recepción de la televisión.

Un conductor solo funciona como jaula de Faraday perfecta si está conectada a tierra o a una fuente de tensión. Si está aislada, en cambio, su carga permanece constante. Esto quiere decir que la carga que aparece en la pared del hueco proviene de la superficie exterior del conductor y por tanto un observador exterior percibe que hay una carga en el conductor (aunque no que haya un hueco o algo en el interior, solo ve el valor de la carga). En la práctica esto significa que una jaula protectora, si no está bien conectada a tierra puede producir un calambre al tocarla.

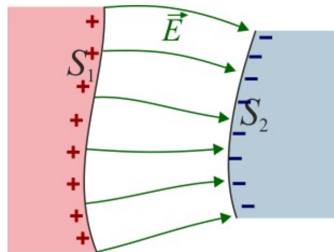
4 Condensadores

4.1 Definición

Cuando tenemos un sistema de conductores separados por el vacío (o por un dieléctrico) y se fijan sus potenciales, habrá líneas de campo que vayan de uno a otro y también las habrá que vayan o vengan del infinito. En este sistema se almacena carga en cada conductor (que será positiva en algunos y negativa en otros). El sistema almacena igualmente una energía electrostática, que podemos situar en el campo eléctrico o en las cargas.



Podemos simplificar el estudio de la carga y la energía almacenada reduciendo el problema a partes más sencillas. Para ello nos centramos en lo que ocurre en cada par de conductores.



Dos superficies conductoras S_1 y S_2 están en influencia total cuando todas las líneas de campo que salen de una van a parar a la otra. Cuando tenemos dos superficies conductoras en influencia total se dice que tenemos un *condensador* y a las dos superficies se las conoce como las placas o armaduras del condensador. Su símbolo en teoría de circuitos está formado por dos líneas paralelas.



Una de las superficies tendrá carga positiva y la otra negativa. dado que el número de líneas de campo que salen de una van a parar a la otra, las dos cargas son iguales y opuestas.

$$Q_2 = -Q_1$$

Esto quiere decir que un condensador no almacena carga neta, ya que esta siempre es cero. Cuando se dice que un condensador almacena tal o cual carga o se encuentra cargado, se refiere siempre a la carga de la placa positiva.

Lo que sí almacena un condensador es energía eléctrica, por el campo eléctrico que hay entre las placas

4.2 Capacidad de un condensador

Cuando tenemos un condensador cargado, existe un campo eléctrico que va de la placa positiva a la negativa. Por tanto, habrá una diferencia de potencial entre ambas placas

$$V_1 - V_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

Esta d.d.p. es proporcional a la carga de las placas. Cuanto mayor sea la carga, mayor el campo y mayor la d.d.p. por lo que se puede escribir la relación

$$Q_1 = C(V_1 - V_2)$$

siendo C la capacidad del *condensador*. Puede definirse mediante la relación

$$C = \frac{Q_1}{V_1 - V_2}$$

es decir, la capacidad de un condensador es igual al cociente entre la carga de una placa y la diferencia de potencial entre esa placa y la otra. Podemos tomar la placa que queramos como referencia, no necesariamente la positiva, ya que

$$C = \frac{Q_1}{V_1 - V_2} = \frac{-Q_2}{V_1 - V_2} = \frac{Q_2}{V_2 - V_1}$$

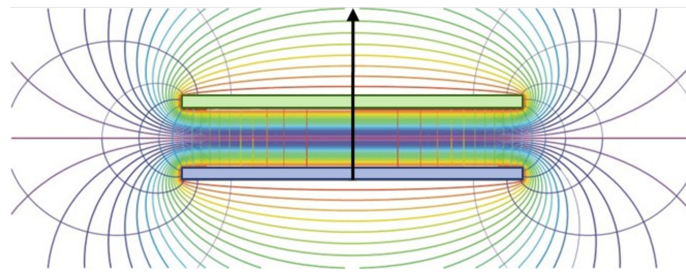
La capacidad de un condensador se mide en faradios (F) con 1 F = 1 C/1 V. Esta unidad, no obstante, es demasiado grande para las capacidades usuales, que se miden en picofaradios (1pF = 10^{-12}F), nanofaradios (1nF = 10^{-9}F) y microfaradios (1μF = 10^{-6}F)

A pesar de que en la definición aparecen la carga y la diferencia de potencial, la capacidad de un condensador es una propiedad geométrica, que depende de la forma y distancia de las superficies, así como de los materiales interpuestos, pero no de a qué tensión se encuentran.

Aunque son conceptos similares, no es lo mismo la capacidad de un *conductor* que se refiere a la carga de un conductor en completa soledad, con la capacidad de un *condensador*, que relaciona dos superficies enfrentadas.

4.2.1 Condensador plano

El caso más sencillo de condensador, y el más utilizado como modelo, es el *condensador plano* formado por dos placas conductoras planas y paralelas, de área S y situadas a una distancia a a la una de la otra.
Una de las placas almacena una carga $+Q$ y la otra una $-Q$. En un sistema real, el campo va de una placa a la otra, con líneas de campo que pueden ser curvadas



Sin embargo, si las placas están muy próximas, puede despreciarse el efecto de esas líneas exteriores (lo que se llaman los *efectos de borde*) y aproximar el campo entre las placas como uno entre dos planos paralelos de gran extensión.

En ese caso, la densidad de carga en cada placa es uniforme

$$\sigma_1 = \frac{Q_1}{S} = \sigma_0 \qquad\qquad \sigma_2 = \frac{Q_2}{S} = -\frac{Q_1}{S} = -\sigma_0$$

y, tal como se ve en un problema, el campo vale lo mismo en todos los puntos entre las placas

$$\vec{E} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\vec{k} = \frac{Q_1}{\varepsilon_0 S}\vec{k}$$

por lo que la diferencia de potencial entre las placas vale

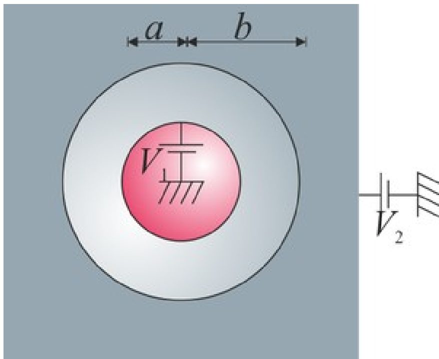
$$V_1 - V_2 = \int_1^2 \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = Ea = \frac{a}{\varepsilon_0 S}Q_1$$

lo que nos da la capacidad

$$C = \frac{Q_1}{V_1 - V_2} = \frac{\varepsilon_0 S}{a}$$

Vemos que el resultado no depende de la carga de las placas, sino del material interpuesto (vacío en este caso), el área de las placas (sin importar si son cuadradas, circulares o de otra forma) y la distancia entre ellas.

4.2.2 Condensador esférico



Un condensador esférico está formado por dos superficies esféricas concéntricas, de radios *a* y *b*. La esfera interior almacena una carga Q_1 y la superficie esférica del hueco una $Q_2 = -Q_1$. Tal como se ve al estudiar el problema de dos esferas concéntricas con cargas $\pm Q$ la diferencia de potencial entre ellas es

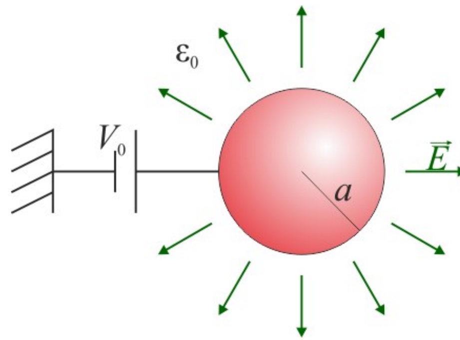
$$V_1 - V_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

lo que nos da la capacidad

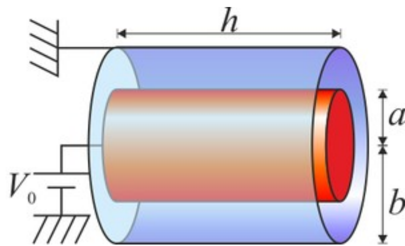
$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} = \frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{b - a}$$

Este resultado contiene como caso particular la capacidad de un conductor esférico. Si consideramos una esfera en ausencia de más conductores, como un condensador una de cuyas placas es la propia esfera y la otra es la tierra, situada en el infinito, la capacidad equivale a tomar el límite $b \longrightarrow \infty$

$$\lim_{b\to\infty} \frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{b - a} = 4\pi\varepsilon_0 a$$



4.2.3 Condensador coaxial

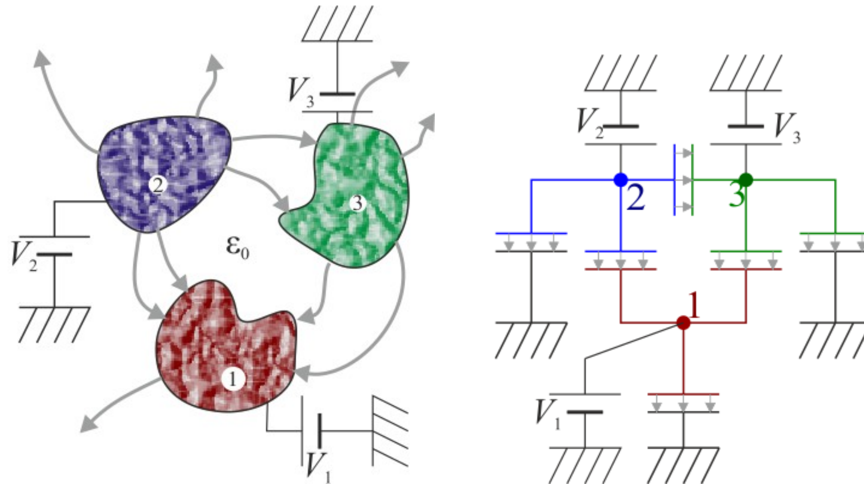


Otro tipo común de condensador es el coaxial, formado por dos cilindros concéntricos, como en los cables de antena de un televisor, ilustrados más arriba. Para una porción de longitud h de un cable de este tipo, con radio interior a y exterior b, la capacidad vale

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 h}{\ln(b/a)}$$

4.3 Circuitos equivalentes

Una vez que se ha definido lo que es un condensador, su extensión es inmediata a cualquier sistema de conductores.



Cuando tenemos un conjunto de conductores, habrá líneas de campo que vaya de uno a otro y líneas que vayan al infinito. Construimos entonces un circuito en el que:

- Cada conductor es representado por un nodo (“1”, “2”,...)
- Hay un condensador entre cada par de nodos, que representa la influencia entre dos conductores.
- Hay un condensador entre cada nodo y tierra, que representa las líneas que van o vienen del infinito.
- Hay una fuente de tensión ideal que fija el voltaje de cada conductor.
-

4.4 Asociaciones de condensadores

De entre los posibles sistemas de condensadores, existen dos asociaciones que son especialmente importante, ya que permiten reducir un conjunto de condensadores a un solo elemento con una capacidad equivalente a toda la asociación.

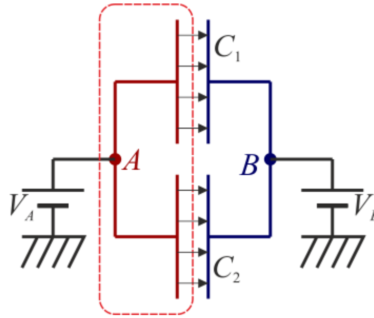
4.4.1 Condensadores en paralelo

Dos condensadores están en paralelo cuando están conectados por sus dos extremos, de forma que la diferencia de potencial entre placas es la misma para los dos

$$\Delta V_1 = \Delta V_2 = V_A - V_B$$

La carga almacenada en la placa positiva de cada condensador será diferente en cada caso

$$Q_1 = C_1\,\Delta V_1 = C_1(V_A - V_B) \qquad\qquad Q_2 = C_2(V_A - V_B)$$



La carga almacenada en el conductor A es la de todos los condensadores unidos al nodo correspondiente

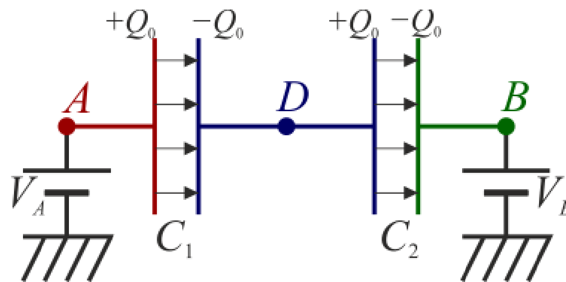
$$Q_A = Q_1 + Q_2 = C_1(V_A - V_B) + C_2(V_A - V_B) = (C_1 + C_2)(V_A - V_B)$$

Por tanto, la asociación es equivalente a un solo condensador de capacidad la suma de las dos individuales

$$C_{\text{eq}} = C_1 + C_2$$

4.4.2 Condensadores en serie

Dos condensadores están en serie cuando están conectados por uno de sus extremos, y el nodo de conexión está aislado y descargado (gráficamente, si en el nodo de conexión no hay ninguna otra rama unida a una fuente u otro condensador).



En este caso, si el primer condensador tiene una carga $Q_1 = Q_0$ en su placa positiva, tendrá una carga $-Q_0$ en la negativa. Ahora bien, por ser el conductor central uno aislado y descargado, esta carga solo puede provenir del propio conductor, por lo que en la placa positiva del segundo condensador habrá una carga

$$Q_2 = -(-Q_0) = Q_0$$

es decir, la carga en la placa positiva de ambos condensadores es la misma. La diferencia de potencial en cada uno es diferente. Si D es el punto central

$$V_A - V_D = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_0}{C_1} \qquad\qquad V_D - V_B = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q_0}{C_2}$$

La diferencia de potencial total de la asociación es la suma de estas dos

$$V_A - V_B = (V_A - V_D) + (V_D - V_B) = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) Q_0$$

Puesto que el condensador equivalente cumple

$$V_A - V_B = \frac{Q_0}{C_{\mathrm{eq}}}$$

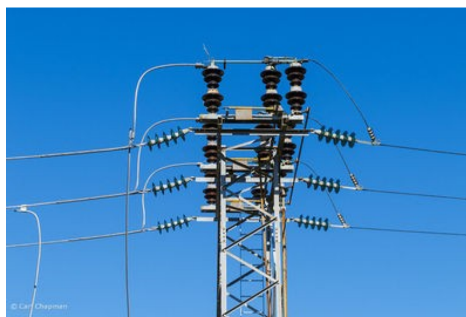
llegamos a

$$\frac{1}{C_{\mathrm{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \qquad \Rightarrow \qquad C_{\mathrm{eq}} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)^{-1} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

La capacidad equivalente a dos condensadores en serie es menor que cualquiera de ellas. Por ejemplo, para un condensador de $3\,\mathrm{nF}$, puesto en serie con uno de $6\,\mathrm{nF}$

$$C_{\mathrm{eq}} = \frac{(3\,\mathrm{nF})(6\,\mathrm{nF})}{(3\,\mathrm{nF}) + (6\,\mathrm{nF})} = 2\,\mathrm{nF}$$

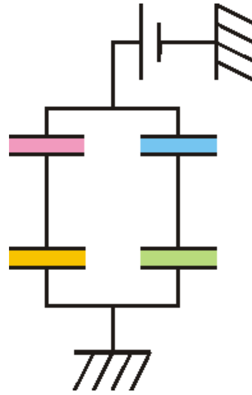
Podemos preguntarnos para qué sirve entonces asociar condensadores en serie. Aparte de que puede ocurrir que aparezcan de manera natural en el modelado de un sistema, pueden diseñarse de esta forma si lo que se desea es soportar una elevada diferencia de potencial. Si por ejemplo, tenemos una línea de alta tensión a 20kV, cuyo cable pasa por una torre, que está a tierra, el aislador que impide la descarga está formado por una serie de condensadores puestos en serie.



4.4.3 Combinación de asociaciones

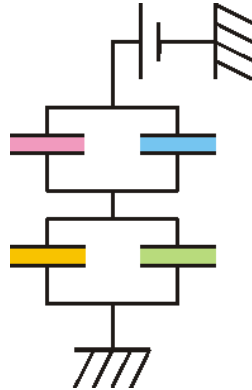
Las asociaciones de condensadores en serie y en paralelo pueden asociarse a su vez, entre sí, reduciendo una red compleja a un conjunto mínimo de condensadores equivalentes.

Así, por ejemplo, la estructura



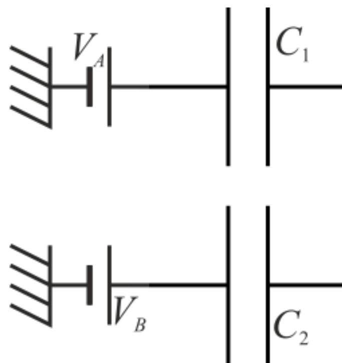
es una asociación en paralelo de dos asociaciones en serie. Para hallar la capacidad equivalente, primero se asocian cada uno de los pares en serie y luego el conjunto de dos en paralelo, tal como se ve en un problema.

Este sistema:

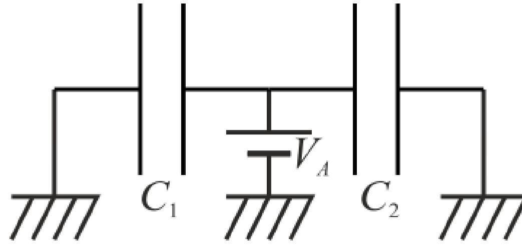


es una asociación en serie de dos asociaciones en paralelo. Para reducirlo a uno solo se opera de forma análoga.

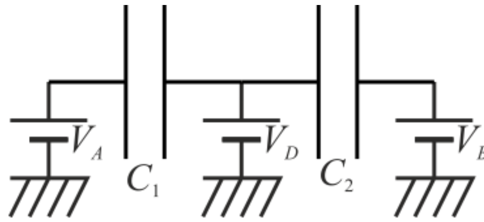
A la hora de identificar asociaciones en serie y en paralelo no hay que dejarse engañar por la disposición en el dibujo. Así, estos dos condensadores están en serie



y estos dos en paralelo



y estos, ni en serie ni en paralelo:



5 Energía en un sistema de conductores

Antes hemos dicho que en un sistema de conductores o en el equivalente circuito de condensadores se almacena energía eléctrica, porque las cargas se encuentran a cierto potencial o porque hay un campo eléctrico entre los conductores (ambas descripciones son equivalentes).

Consideraremos solo el caso de que toda la carga esté sobre los conductores y no en el espacio entre ellas. En este caso es de aplicación la fórmula para la energía de una distribución

$$U_\mathrm{e} = \frac{1}{2}\int_S \sigma_s V(\vec{r})\,\mathrm{d}S$$

ya que toda la carga está en la superficie de los conductores. En esta expresión el potencial es función de la posición, ya que tendrá un valor diferente para cada uno de los conductores del sistema. Esta integral sobre todas las superficies la podemos descomponer en una suma de integrales sobre cada uno de los conductores

$$U_\mathrm{e} = \frac{1}{2}\sum_k \int_S \sigma_s V_k\,\mathrm{d}S$$

con la ventaja de que ahora el potencial en cada uno de los conductores tiene un solo valor, por lo que puede salir de cada integral

$$U_\mathrm{e} = \frac{1}{2}\sum_k V_k \int_S \sigma_s\,\mathrm{d}S = \frac{1}{2}\sum_k V_k Q_k$$

es decir, la energía solo depende de los potenciales de los diferentes conductores y de cuanto vale la carga total en cada uno de ellos, pero no de como está distribuida sobre la superficie.

Puesto que de antemano no se conocen simultáneamente la carga y el potencial de cada conductor (o una cosa o la otra), la energía solo se puede hallar una vez que se ha resuelto el problema del potencial y calculado las cantidades desconocidas.

En el caso particular de una sola esfera con carga Q su potencial vale

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

y por tanto su energía es

$$U_\mathrm{e} = \frac{1}{2}QV = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 a}$$

¿Cuánta energía hace falta para colocar una carga de 1 C es una esfera de 1 m de radio? Por simple sustitución obtenemos

$$U_\mathrm{e} = 4.5\times 10^9\,\mathrm{J} = 4.5\,\mathrm{GJ}$$

que es una cantidad gigantesca de energía, lo cual muestra la dificultad de concentrar una cantidad tan grande de carga.



Es más, si se calcula la presión a la que estaría sometida la esfera debida a a las fuerzas eléctricas, se obtiene un valor de 3500 bares (0.35 GPa), lo cual supera la resistencia de cualquier material conocido.

5.1 Energía de un condensador

En el caso particular de un condensador, tenemos dos superficies conductoras con cargas iguales y opuestas y una d.d.p. entre ellas. La energía almacenada en el condensador vale

$$U_\mathrm{e} = \frac{1}{2}Q_1V_1 + \frac{1}{2}(-Q_1)V_2 = \frac{1}{2}Q_1(V_1 - V_2)$$

es decir, es igual a la carga del condensador (la de una se sus placas) multiplicada por la diferencia de potencial entre esa placa y la otra.

En función de la capacidad

$$Q_1 = C(V_1 - V_2) \qquad \Rightarrow \qquad U_\mathrm{e} = \frac{1}{2}C(V_1 - V_2)^2 = \frac{Q_1^2}{2C}$$

Así, para un condensador plano queda

$$U_\mathrm{e} = \frac{1}{2}\,\frac{\varepsilon_0 S}{a}(V_1 - V_2)^2$$

Podemos ver que se llega al mismo resultado a partir del campo eléctrico. En el caso de un condensador plano, el campo eléctrico es igual a

$$\vec{E} = \frac{V_1 - V_2}{a}\vec{k}$$

La densidad de energía eléctrica dentro del condensador

$$u_\mathrm{e} = \frac{1}{2}\varepsilon_0|\vec{E}|^2 = \frac{\varepsilon_0}{2a^2}(V_1 - V_2)^2$$

y la energía total almacenada en él, teniendo en cuenta que el volumen equivale al área de las placas multiplicada por la distancia entre ellas

$$U_\mathrm{e} = \int u_e\,\mathrm{d}v = \int \frac{\varepsilon_0}{2a^2}(V_1 - V_2)^2\,\mathrm{d}v = \frac{\varepsilon_0}{2a^2}(V_1 - V_2)^2 aS = \frac{1}{2}\,\frac{\varepsilon_0 S}{a}(V_1 - V_2)^2 = \frac{1}{2}C(\Delta V)^2$$

Concluimos entonces que un condensador es un dispositivo que almacena energía eléctrica por tener un campo eléctrico entre sus placas.

En el caso de que tengamos un sistema de condensadores, la energía total será la suma de la energía almacenada en cada uno

$$U_\mathrm{e} = \frac{1}{2}\sum_i C_i(\Delta V_i)^2$$

En particular, tanto para una asociación en serie como para una en paralelo la energía total es igual a la que almacenaría el condensador equivalente

$$U_\mathrm{e} = \frac{1}{2}C_\mathrm{eq}(\Delta V)^2$$

Electrostática en presencia de dieléctricos

1 Concepto de dieléctrico

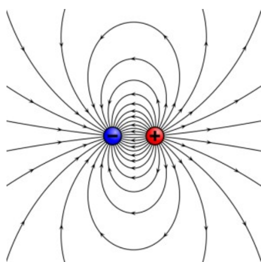
Los medios materiales responden de diferentes maneras en presencia de un campo eléctrico aplicado. Un material conductor es aquel que permite el movimiento de cargas por su interior, llegando finalmente al estado de equilibrio electrostático.

Los dieléctricos o aislantes son aquellos materiales que no permiten el movimiento de cargas por su interior. En ellos todas las cargas están ligadas en sus respectivos átomos y no pueden desplazarse. Suelen ser materiales plásticos o cristalinos con fuertes enlaces covalentes. Incluso en materiales dieléctricos el campo no es el mismo que en el vacío, por la presencia de dipolos inducidos por el campo eléctrico. El límite es el modelo de *dieléctrico ideal* o *aislante perfecto*, que no permite en absoluto el movimiento de cargas por su interior.

El efecto de una conductividad finita en un dieléctrico real se analiza al estudiar las corrientes eléctricas. Aquí consideramos el modelo más simple de un dieléctrico ideal.

Podemos preguntarnos, si un dieléctrico ideal no permite el movimiento de cargas y éstas no pueden redistribuirse por el material, ¿cómo influye en el campo eléctrico? ¿Por qué no es equivalente al vacío?

La respuesta es que aunque un dieléctrico ideal no tenga cargas libres, sí tiene dipolos. Un dipolo eléctrico consiste en un par de cargas de la misma magnitud y signo opuesto separadas una cierta distancia. Un dipolo produce un campo eléctrico característico.

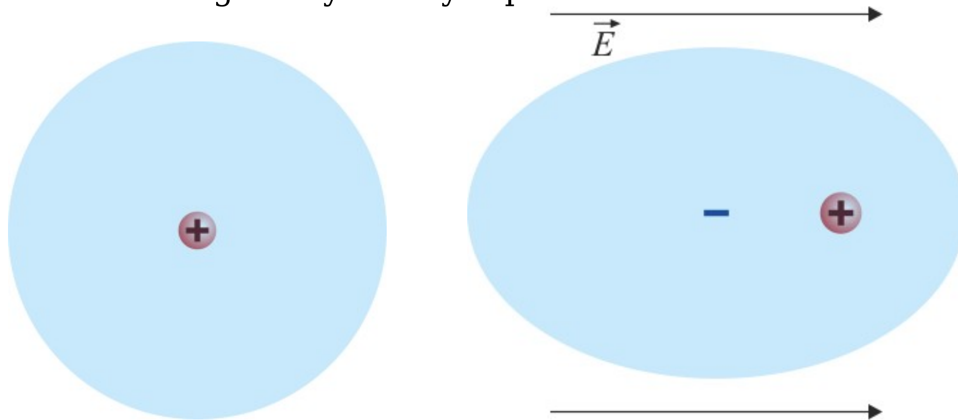


En un dipolo las cargas no son libres, sino que están ligadas entre sí, pero sus campos no se neutralizan por estar separadas. Un dieléctrico ideal está constituido por millones de dipolos elementales, que afectan al campo eléctrico.

¿De dónde proceden estos dipolos? Hay de dos tipos, no excluyentes:

Dipolos inducidos

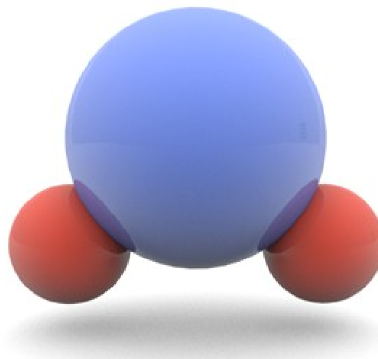
Son los que aparecen por la aplicación de un campo eléctrico. Consideremos, por ejemplo, un átomo de helio, formado por un núcleo de carga positiva rodeado de una nube de carga negativa. En ausencia de campo externo el núcleo se encuentra en el centro de la nube negativa y no hay separación de los centros de carga.



Si se aplica un campo externo, el núcleo es empujado en el sentido del campo, mientras que la nube es empujada en el sentido opuesto. El resultado es una separación de los centros de carga, formándose un dipolo. Nótese que las cargas son ligadas y en ningún momento llega a arrancarse un electrón del átomo.

Dipolos permanentes

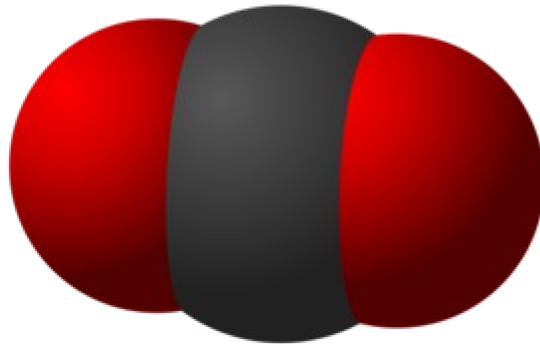
Las llamadas sustancias polares, como el agua, están formadas por moléculas que ya de por sí son dipolos.



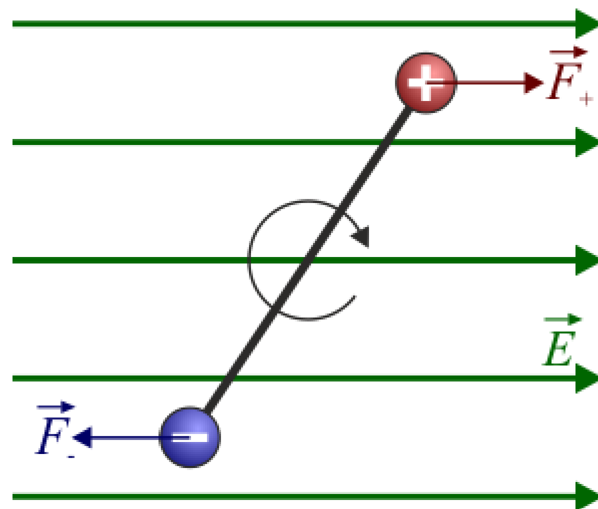
En una molécula de agua, el oxígeno tira de los electrones con más fuerza que los átomos de hidrógeno, de forma que en la molécula aparece una densidad de carga negativa en la parte donde se encuentra el oxígeno y positiva en el lado opuesto. La molécula se comporta como un dipolo.

Esto no ocurre en todas las sustancias. El dióxido de carbono, por ejemplo, es una sustancia apolar, aunque el oxígeno tira más de

los electrones que el carbono, la simetría de la molécula evita que se produzca separación de los centros de carga.



El efecto de un campo aplicado sobre un dipolo permanente es orientarlo. Al tirar de la carga positiva en un sentido y de la negativa en otro, el resultado es un par de fuerzas que tiende a alinear el dipolo con el campo aplicado.

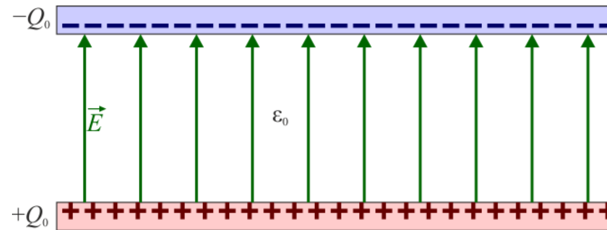


2 Efecto de un dieléctrico entre conductores

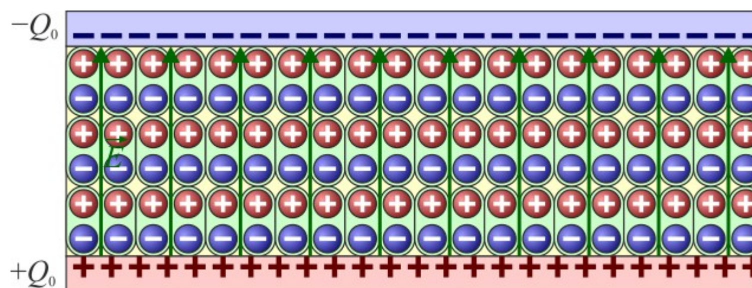
Tanto si los dipolos son inducidos como si son permanentes, el efecto de un campo aplicado es que aparezca una distribución de dipolos alineados con el campo aplicado.

Supongamos que tenemos un condensador plano cuyas placas tienen cargas $\pm Q_0$ y entre las cuales hay vacío. En este caso aparece un campo eléctrico entre las placas que va de la placa positiva a la negativa y cuyo valor es

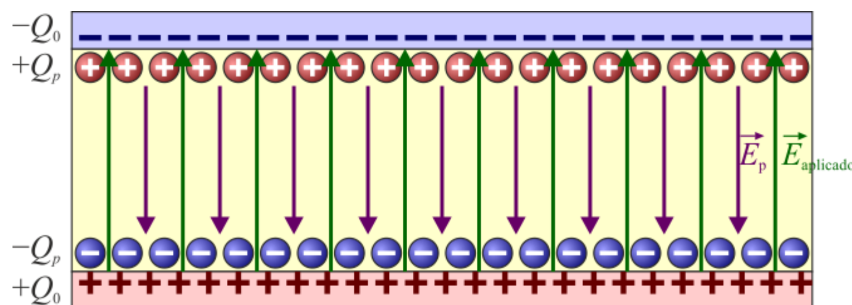
$$\vec{E}_{\text{aplicado}} = \frac{Q_0}{\varepsilon_0 S}\vec{k}$$



Si ahora colocamos un dieléctrico entre las placas, este material se *polariza*, y los dipolos del material se alinean con el campo aplicado.



Ahora bien, los dipolos tienen cargas positivas junto a las negativas de sus vecinos, por lo que sus efectos se cancelan, salvo los situados en los límites del dieléctrico



El efecto de los dipolos del dieléctrico es equivalente entonces a una densidad de carga (conocida como carga de polarización o carga ligada) situada en la frontera del dieléctrico o en los puntos donde la polarización no es uniforme. Esta carga de polarización produce su propio campo, que va en sentido opuesto al campo aplicado, pero tiene menor intensidad

$$|\vec{E}_p| < |\vec{E}_{\text{aplicado}}|$$

de forma que el resultado neto es una reducción del campo total

$$\vec{E} = \vec{E}_{\text{aplicado}} + \vec{E}_p \qquad\qquad |\vec{E}| < |\vec{E}_{\text{aplicado}}|$$

La polarización del dieléctrico es proporcional al campo aplicado, por lo que el campo total es proporcional a la carga de las placas y se puede escribir

$$\vec{E} = \frac{Q}{\varepsilon S}\vec{k}$$

donde ε es una propiedad del dieléctrico conocida como su *permitividad absoluta*. Puesto que el campo eléctrico es menor que el que habría con el condensador en vacío debe ser

$$\varepsilon > \varepsilon_0$$

Para medir las propiedades de un dieléctrico se usa tanto la permitividad absoluta como la *permitividad relativa*, definida como el cociente

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$$

(a la permitividad relativa también se la denota como *K*). Tanto a la permitividad absoluta como a la relativa se la suele denominar simplemente *permitividad*, ya que el contexto permite distinguirlas fácilmente:

- La permitividad absoluta es una cantidad con unidades (se mide en F/m en el SI) cuyo valor es muy pequeño en las unidades fundamentales del SI. Así, para el agua, la permitividad absoluta vale

$$\varepsilon = 7.0 \times 10^{-10}\,\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}$$

- La permitividad relativa es una magnitud adimensional (un número) que es siempre mayor que la unidad y cuyo valor suele ser moderado. Así, para el agua su permitividad relativa es

$$\varepsilon_r = 81$$

y para otras sustancias como el metacrilato o plexiglás vale aproximadamente 3.

3 Condensadores con dieléctricos

El efecto de introducir un dieléctrico en un condensador con una carga fijada es el de reducir el campo entre las placas. Esto implica que disminuye la diferencia de potencial entre ellas. Si la distancia entre placas es *a*

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = Ea = \frac{aQ_0}{\varepsilon S} = \frac{Q_0}{C}$$

donde la nueva capacidad del condensador es

$$C = \frac{\varepsilon S}{a}$$

es decir, basta con sustituir la permitividad del vacío por la del dieléctrico.

Puesto que la permitividad de un dieléctrico es mayor que la del vacío, el resultado de rellenar un dieléctrico es aumentar su capacidad, es decir:

- A igualdad de carga, la d.d.p. es menor en el condensador con dieléctrico, como acabamos de ver.
- A igualdad de d.d.p., el condensador con dieléctrico almacena más carga en sus placas.

Este resultado se extiende a la energía almacenada en el condensador, que pasa a ser

$$U_\mathrm{e} = \frac{Q^2}{2C} < \frac{Q^2}{2C_0}$$

siendo C_0 la capacidad en vacío, es decir, que a igualdad de carga, la energía almacenada en un condensador con dieléctrico es menor que la que hay en vacío. Si tenemos un condensador cargado e intercalamos entre sus placas una lámina de dieléctrico, se produce una disipación de energía. A nivel microscópico esto ocurre porque la polarización de un dieléctrico implica fricción y producción de calor.

Por contra, si lo que se fija es la d.d.p.

$$U_e = \frac{1}{2}C(\Delta V)^2 > \frac{1}{2}C_0(\Delta V)^2$$

la energía del condensador es mayor con dieléctrico que sin él.

Para este segundo caso, podemos imaginar un proceso en el que tenemos un condensador en vacío, que almacena una cierta energía. Si manteniendo la d.d.p. introducimos entre sus placas una lámina de dieléctrico, la energía almacenada aumenta.

$$U_0 = \frac{1}{2}C_0(\Delta V)^2 \qquad U_e = \frac{1}{2}C(\Delta V)^2 \qquad \Delta U_e = \frac{1}{2}(C - C_0)(\Delta V)^2 > 0$$

¿De donde sale esta energía extra? De la fuente de tensión que mantiene constante el voltaje. Para ello debe introducir una cantidad extra de carga (ya que la capacidad aumenta). Para ello, realiza un trabajo igual a la carga que coloca multiplicada por la diferencia de potencial a la que la eleva

$$W_g = (\Delta Q)(\Delta V) = (C\,\Delta V - C_0\,\Delta V)(\Delta V) = (C - C_0)(\Delta V)^2$$

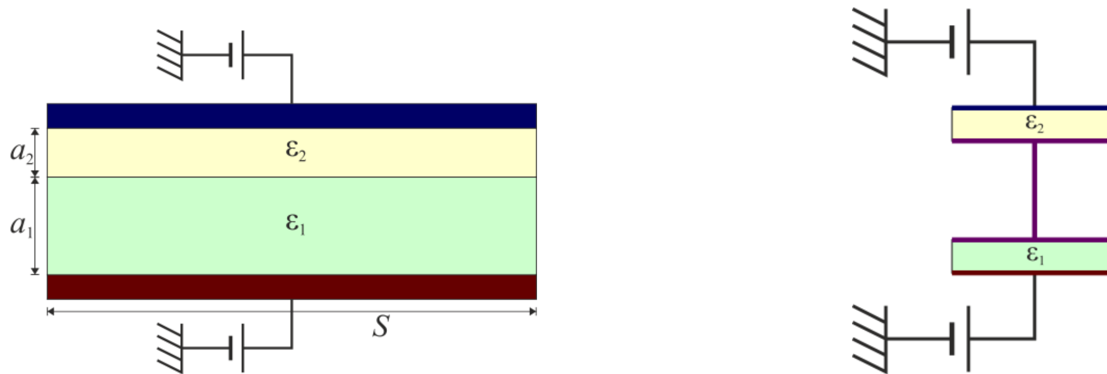
Es decir, la fuente realiza un trabajo igual al doble del aumento en la energía interna. Esto quiere decir que en realidad estamos disipando energía, ya que la fuente realiza un trabajo mayor que lo que se almacena, por lo que se produce una disipación en forma de calor.

4 Conductores con dieléctricos

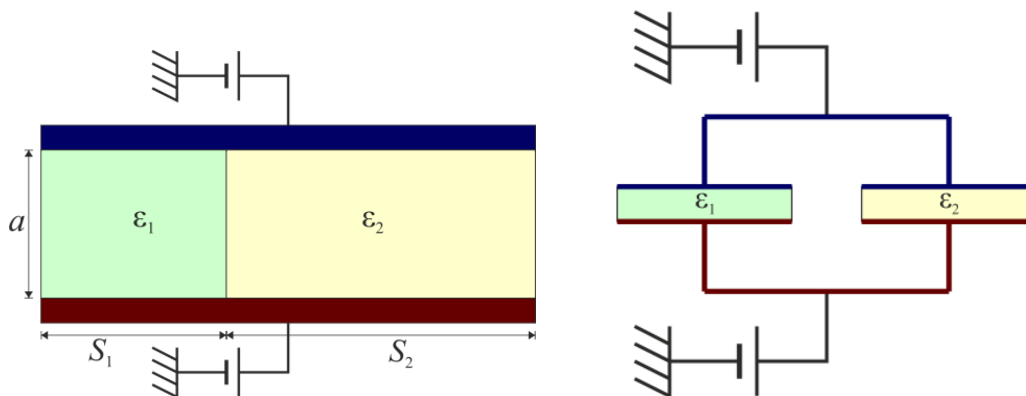
Lo anterior se generaliza a un problema general en el que tengamos un sistema de conductores entre los cuales hay dieléctricos. En este caso tenemos un problema del potencial, análogo al caso de los conductores en el vacío, pero con diferentes dieléctricos entre ellos. Estos dieléctricos no tienen por qué ser homogéneos ya que la permitividad puede variar de un punto a otro.

Este problema general del potencial casi en ningún caso posee solución analítica y se requiere el uso de ordenadores.

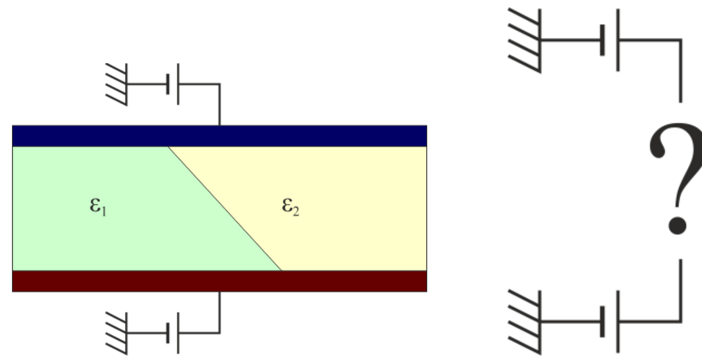
En algunos casos el sistema puede modelarse por elementos más sencillos. Así, un sistema con dos capas de dieléctrico equivale a dos condensadores en serie



y uno con dos bloques adyacentes puede modelarse como dos condensadores en paralelo



pero uno en el que la interfaz (la frontera entre los medios) no sea ni paralela ni perpendicular a las placas equivale a un solo condensador, pero no se puede modelar por un sistema sencillo, sino que hay que calcular numéricamente su capacidad



En un sistema general de conductores con dieléctricos, sigue siendo cierto que la energía del sistema es

$$U_\mathrm{e} = \frac{1}{2}\sum_i Q_i V_i$$

y que esta energía puede hallarse a partir del campo eléctrico mediante la integral extendida a todo el espacio

$$U_\mathrm{e} = \frac{1}{2}\int \varepsilon|\vec{E}|^2\,\mathrm{d}v$$

donde la permitividad será la del vacío donde no haya dieléctrico y la del dieléctrico donde sí lo haya.

5 Ruptura de un dieléctrico

Antes se ha dicho que la capacidad de un condensador aumenta al colocar un dieléctrico entre sus placas. Podría pensarse que esta es la razón de que los condensadores se fabriquen siempre con un dieléctrico entre las armaduras. No obstante, no es esta la razón principal.

- En primer lugar, proporcionan rigidez mecánica. Si se coloca un dieléctrico entre las placas, éstas no se pueden tocar, por lo que no es más difícil que se produzca un cortocircuito. Con dos placas en vacío, teniendo en cuenta lo poco separadas que están, cualquier vibración haría que se rozaran.
- Son más fáciles de montar. Puesto que ya no es necesario que las placas conductoras sean rígidas, éstas pueden reducirse a una película de pintura conductora o a una fina lámina de metal adherida al dieléctrico.

- Son más resistentes a la ruptura dieléctrica. Cuando entre dos puntos de un dieléctrico o en el aire se establece un campo eléctrico muy intenso, este puede llegar a ionizar el medio y saltar una chispa. Cuando esto ocurre, se dice que el dieléctrico se ha *perforado*, el condensador se quema y queda inservible. En términos circuitales, es como si hubiéramos hecho un cortocircuito entre las placas. El campo mínimo para que esto ocurra se denomina *campo de ruptura* o *rigidez dieléctrica* del material

    - En el caso del aire, el valor del campo de ruptura es muy variable, pero es del orden de 3 MV/m.
    - En el caso del papel con cera que se usa en condensadores, el campo de ruptura asciende a entre 40 y 60 MV/m

Esto quiere decir que la carga máxima que se puede meter en un condensador con papel de cera es como unas 50 veces la que almacenaría un condensador equivalente en vacío (teniendo en cuenta que $\varepsilon_r \simeq 3$) y además soporta una d.d.p. 20 veces mayor.

Corriente eléctrica

Introducción

La electrostática es el estudio del campo y las fuerzas debidos a cargas en reposo. Sin embargo, no es ese el estado natural de las cargas. Éstas suelen encontrarse en movimiento, bien debido a la agitación térmica, bien impulsadas por campos eléctricos y magnéticos. Cuando tenemos un movimiento colectivo de cargas se dice que tenemos una *corriente eléctrica*.

Si la corriente es independiente del tiempo se denomina *corriente continua* o *corriente estacionaria*. En caso contrario es una *corriente dependiente del tiempo* (con la corriente alterna como caso particular).

En situaciones donde hay corrientes eléctricas, aunque sean estacionarias, ya dejan de ser ciertas algunas de las propiedades de la electrostática. En particular, la afirmación de que es nulo el campo eléctrico en el interior de un conductor ya no es cierta. Eso solo vale en el equilibrio electrostático. Si hay corrientes es porque las cargas se ven impulsadas por alguna fuerza y en la mayoría de los casos esa fuerza es debida a la presencia de un campo eléctrico en el interior del material.

El estudio de la corriente eléctrica es bastante extenso incluso a un nivel puramente introductorio, por lo que dividiremos el material en varias partes:

1. Densidad e intensidad de corriente: Donde se definen los conceptos básicos que caracterizan una corriente y se formula la ley de conservación de la carga.
2. Ley de Ohm: Constituye la relación más común entre corriente y campo eléctrico y lleva al concepto de resistencia eléctrica.
3. Generadores: Son los dispositivos que producen las corrientes eléctricas.
4. Problemas: Problemas ilustrativos, algunos de los cuales añaden elementos de teoría:

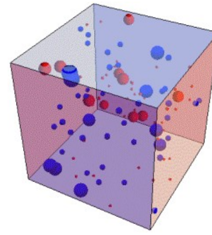
Densidad e intensidad de corriente

1 Modelos de conducción

Las corrientes eléctricas tienen todas en común el movimiento de cargas por el vacío o el interior de un material, pero el mecanismo por el que esto ocurre es muy diverso. Para describirlos se usan los *modelos de conducción*, que tienen una parte cualitativa y una descripción matemática (que no consideraremos).

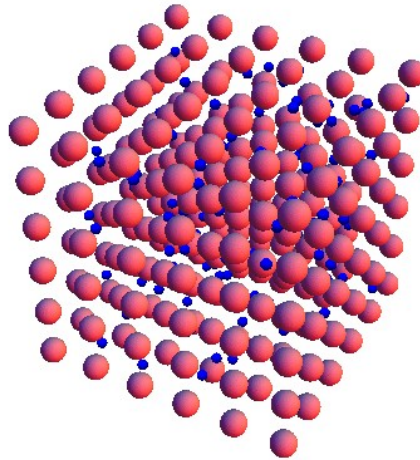
Disoluciones salinas

El caso más sencillo es el de una cantidad de agua en el que hay sales disueltas. En este caso, flotando en la *sopa* hay iones de diferentes cargas y signos. De entrada tenemos los iones OH^- y H^+ en que se disocia el agua, pero además tenemos Cl^-, Na^+, Ca^{2+}, K^+, etc. dependiendo de las sales que haya disueltas. Cada una de las variedades cargadas se denomina una *especie* de portadores de carga, caracterizada por una valencia Z. Por ejemplo, todos los iones Cl^- constituyen una especie de valencia $Z = -1$, todos los iones Ca^{2+} forman una especie de valencia $Z = +2$. En agua destilada tenemos dos especies de portadores de carga (OH^- y H^+). Si tiene sal común, habrá 4 especies (Cl^-, Na^+, OH^- y H^+). En el agua de mar hay una enorme variedad de especies.



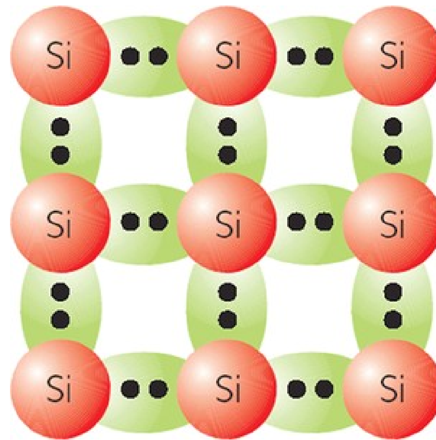
Conductores metálicos

Constituyen el caso más típico de conductores y son los de mayores aplicaciones industriales, donde se usan materiales conductores como cobre, oro, platino, etc. En un material metálico la conducción se produce porque hay electrones libres. Existe una red de iones fijos (los núcleos y la mayoría de los electrones de cada átomo) y una *nube de electrones* formada por uno o dos electrones por cada átomo (uno en el caso del cobre). Estos electrones no están asociados a ningún átomo en concreto, sino que pertenecen conjuntamente a toda la red, produciendo lo que se llama un *enlace metálico*. Estos electrones pueden moverse más o menos libremente por el interior del material, formando la corriente eléctrica. En este caso tenemos una sola especie de portadores de carga, los electrones.



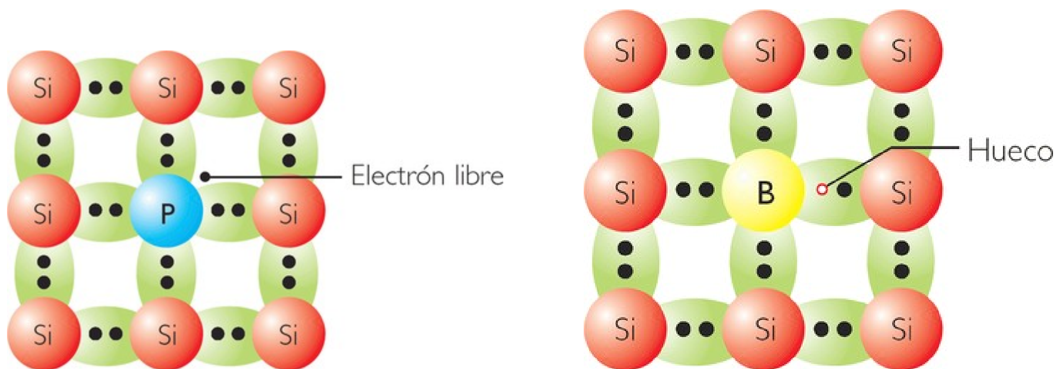
Semiconductor

Un semiconductor, como el carbono o el silicio, está formado por una red cristalina en la que los electrones están ligados a cada átomo formando enlaces covalentes. En una red sin defectos y a 0K no puede haber corriente eléctrica ya que no hay portadores de carga disponibles.



Sin embargo, existen dos motivos por los que aparecen portadores en estos materiales:

- Por la agitación térmica, que hace que algunos electrones tengan energía suficiente para abandonar el átomo al que pertenecen.
- Por la presencia de impurezas ("dopado") de otros materiales, que tienen un electrón de más o de menos.



En ambos casos, tenemos un cierto número de electrones que pueden moverse por la red, funcionando como portadores de carga. Pero además, el efecto de que un electrón abandone su átomo es la aparición de un hueco. A medida que otros electrones van ocupando este hueco, el efecto es el movimiento aparente del hueco en sentido contrario. Por ello, en un semiconductor tenemos dos especies de portadores: los electrones, con valencia -1 y los huecos con valencia $+1$.

Plasma

Un plasma es un estado de la materia consistente en un gas ionizado. En un plasma tenemos una gran variedad de portadores,

ya que hay gran número de estados de ionización posible. En un plasma las cargas se mueven por el aire sometidas a las interacciones con el resto de cargas y con los campos externos.

2 Densidad de corriente

La magnitud que mide el movimiento promedio de las cargas en un material es la *densidad de corriente*. Para definirla se toma un elemento de volumen Δv (que es microscópico, pero contiene millones de cargas en su interior), situado en el punto $\vec{r}$, y se calcula el promedio del producto de las cargas por la velocidad

$$\vec{J} = \frac{1}{\Delta v} \sum_{q_i \in \Delta v} q_i \vec{v}_i$$

La densidad de corriente es una magnitud vectorial, análoga hasta cierto punto a la cantidad de movimiento: cuanta más carga haya, mayor es la densidad de corriente; cuanto más rápido se mueva, mayor es la densidad. Si no hay cargas (vacío) o no se mueven (electrostática) la densidad de corriente se anula.

De la definición de la densidad se tiene que se mueve en $C\cdot(m/s)/m^3 = A/m^2$ donde un amperio (A) es igual a 1 C/s.

Puesto que en la expresión aparece la velocidad, el sumatorio se puede restringir a los portadores de carga, ya que las cargas estáticas no contribuyen.

Por otro lado, podemos hacer la aproximación de que todos los iones de la especie k se mueven con la misma velocidad promedio. En ese caso, podemos agrupar términos y escribir la densidad de corriente como

$$\vec{J} = \sum_k N_k Z_k e \vec{v}_k$$

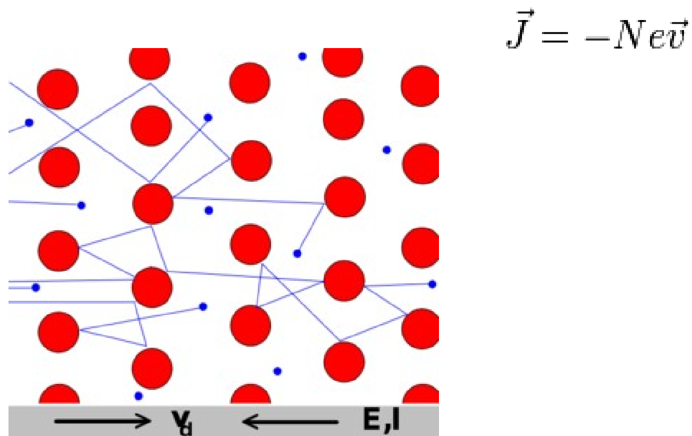
donde

- La suma se hace sobre el número de especies (una en un conductor metálico, dos en un semiconductor, unas cuantas en una disolución).
- N_k es la densidad numérica del portador k (p.ej. cuantos electrones libres hay por unidad de volumen).
- Z_k, es la valencia de la especie k, que sería -1 para los electrones.
- e es la carga elemental, que vale aproximadamente $1.6\times 10^{-19}\,\mathrm{C}$.

- $\vec{v}_k$ es la velocidad promedio de los iones de la especie *k*. A esta velocidad se la conoce como *velocidad de arrastre*.

En el caso de un conductor metálico, los únicos portadores son los electrones y al expresión anterior se reduce a

$$\vec{J} = -Ne\vec{v}$$



siendo N la densidad de electrones libres (no de todos los electrones, los que están fijos en los átomos no cuentan) y $\vec{v}$ es la velocidad de arrastre. Vemos que en este caso concreto, los electrones se mueven en un sentido y la densidad de corriente va en sentido contrario, por ser la carga negativa. Esto es fuente de infinitas confusiones. Por ello, a la hora de describir el movimiento de las cargas en un conductor, es preferible suponer que las cargas que se mueven son las positivas, aunque no corresponda a lo que ocurre en realidad. Los cálculos también son correctos de esta forma y es más sencillo.

El valor de la velocidad de arrastre puede ser extremadamente pequeño. Para un hilo de cobre que soporta una densidad de corriente de 1 A/mm² no llega a 1 mm/s. Uno pensaría que los electrones se mueven mucho más rápido y así es para cada electrón. La velocidad de arrastre es la velocidad promedio, no la rapidez promedio. Aunque el electrón puede moverse con una rapidez próxima a la velocidad de la luz, la mayor parte se su movimiento es aleatorio y hay muy poco avance neto.

La presencia de una densidad de corriente en un punto no es incompatible con la ausencia de una densidad de carga en ese punto. De hecho, podemos tener los cuatro casos:

Densidad de carga nula $\rho = 0$ y densidad de corriente nula $\vec{J} = \vec{0}$

Esto es lo que ocurre en un vacío total, en el que no hay nada, pero también en el interior de un conductor en equilibrio. En ese caso, que no haya densidad de carga no significa que no haya

cargas. Hay millones de ellas, lo que ocurre es que hay tantas positivas como negativas. Al estar en equilibrio, en promedio están inmóviles y también se anula la densidad de corriente.

Densidad de carga no nula $\rho \neq 0$ y densidad de corriente nula $\vec{J} = \vec{0}$
: Es lo que ocurre cuando tenemos una densidad de carga estática, como en muchos problemas de electrostática.

Densidad de carga nula ρ = 0 y densidad de corriente no nula $\vec{J} \neq \vec{0}$
: Es el caso habitual en un material conductor (metal, disolución o semiconductor). En cada punto hay tantas cargas positivas como negativas, pero se están moviendo. En un metal, por cada electrón en movimiento hay un ion en reposo. Solo los primeros contribuyen a la densidad de corriente, pero los dos lo hacen a la densidad de carga.

Densidad de carga no nula $\rho \neq 0$ y densidad de corriente no nula $\vec{J} \neq \vec{0}$
: Es el caso general, que se da sobre todo en los plasmas, en los que tenemos nubes de cargas en movimiento, sin que estén compensadas las positivas por las negativas.

3 Intensidad de corriente

La densidad de corriente es una medida adecuada de lo que ocurre en cada punto de un material, de si las cargas se están moviendo o no y hacia adonde lo hacen.

En la mayoría de las aplicaciones, en particular en la teoría de circuitos, interesa más el efecto global del movimiento de las cargas.

Supongamos que tenemos un material conductor en forma de cilindro (un cable, por ejemplo) por el cual está circulando una corriente. Nos preguntamos entonces cuanta carga atraviesa una sección del conductor en la unidad de tiempo. Esta cantidad es la *intensidad de corriente* definida como el flujo de la densidad de corriente través de una sección del conductor

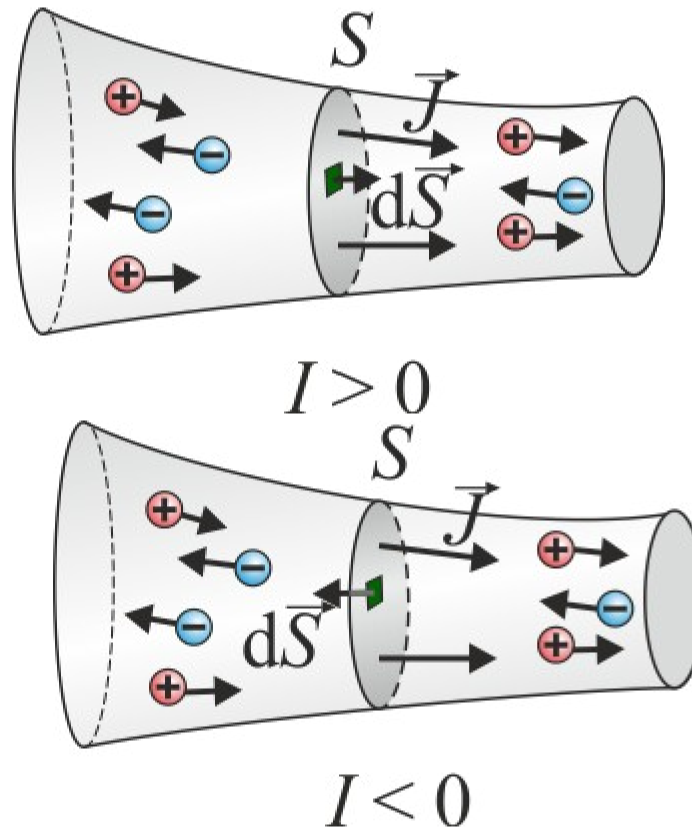
$$I = \int_S \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

de forma que la carga que pasa en un tiempo d*t* es igual a

$$\mathrm{d}Q = I\,\mathrm{d}t$$

La intensidad de corriente es una magnitud escalar con signo. El signo de la intensidad de corriente nos dice para donde va la corriente respecto de la orientación de la superficie. Cuando se traza la superficie

S, su vector normal tiene dos posibles sentidos. Si al hallar el flujo resulta una cantidad positiva quiere decir que las cargas positivas se mueven en el sentido elegido. Si la intensidad resulta negativa, quiere decir que se mueven en el sentido contrario al elegido (con las cargas negativas sería al revés).



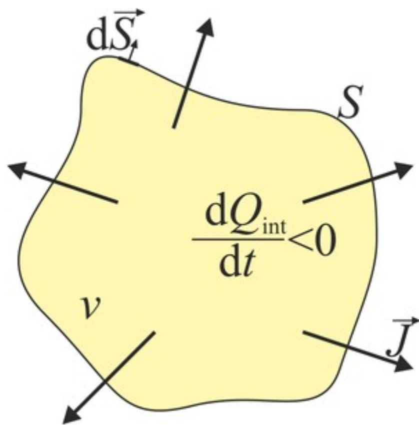
La unidad de medida de la intensidad de corriente es el amperio (A), que es una de las unidades fundamentales del Sistema Internacional. Un amperio es una medida razonable para las corrientes existentes en la industria. Un aparato electrónico, como un ordenador tiene corrientes del orden de los mA. Una red eléctrica doméstica o una máquina puede tener corrientes de varios amperios. Una red de alta tensión puede llegar hasta los kA circulando por los cables.

En términos del amperio, la unidad de carga, el culombio (C), se define como 1 C = 1 A·s

4 Ley de conservación de la carga

Una de las propiedades fundamentales de la interacción eléctrica es que la carga eléctrica se conserva. Para cualquier volumen la cantidad de carga contenida en su interior solo puede cambiar porque entre

carga desde fuera o porque salga al exterior, nunca porque se cree de la nada.



Matemáticamente se expresa de la siguiente forma:

$$-\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \oint_S \vec{J}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

donde:

- S es una superficie cerrada que contiene un volumen v.
- $Q = Q(t)$ es la carga contenida en v
- $\mathrm{d}Q\,/\,\mathrm{d}t$ es el aumento de la carga contenida por unidad de tiempo.
- $-\,\mathrm{d}Q\,/\,\mathrm{d}t$ es la disminución de la carga contenida por unidad de tiempo.
- $\oint_S$ representa la integral sobre toda la superficie cerrada S.
- $\vec{J}$ es la densidad de corriente en todos los puntos de la superficie S
- $\mathrm{d}\vec{S}$ es el vector diferencial de superficie

  $$\mathrm{d}\vec{S} = \mathrm{d}S\,\vec{n}$$

  donde para una superficie cerrada, $\vec{n}$ se toma siempre hacia el exterior.

Esta misma ley puede leerse de otras formas. Por ejemplo si la escribimos

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \oint_S \vec{J}\cdot(-\mathrm{d}\vec{S})$$

diríamos que lo que aumenta la carga contenida se debe al flujo de corriente hacia el interior.

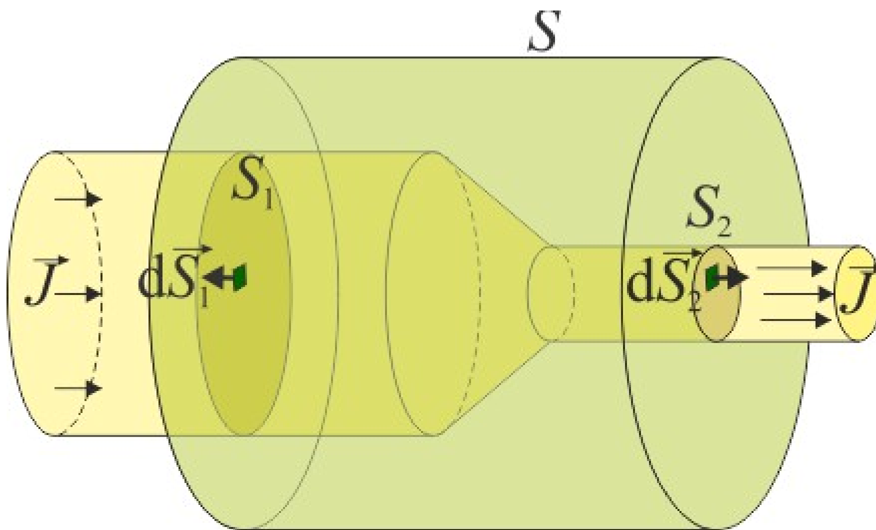
Caso de una corriente estacionaria

En el estado estacionario, la carga contenida en un volumen no cambia, por lo que la ley de conservación de la carga se reduce a

$$\oint \vec{J}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0 \qquad \text{(estado estacionario)}$$

5 Aplicación a un circuito

5.1 Conservación de la corriente



La ley de conservación de la carga tiene una aplicación inmediata a la teoría de circuitos. Consideremos en primer lugar el caso de un conductor a lo largo del cual circula una corriente, siendo el exterior vacío (que suponemos perfectamente aislante). El conductor puede tener sección variable y estar hecho de diferentes materiales.

Suponemos que por este conductor circula una corriente estacionaria.

Si consideramos una superficie cerrada S que corta al conductor en dos secciones S_1 y S_2. Por ser la corriente estacionaria

$$0 = \oint_S \vec{J}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_{S_1} \vec{J}\cdot \mathrm{d}\vec{S}_1 + \int_{S_2} \vec{J}\cdot \mathrm{d}\vec{S}_2$$

Si tomamos la intensidad de corriente a lo largo del conductor como el flujo de la densidad de corriente hacia adelante, entonces

$$I_1 = -\int_{S_1} \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{S}_1 \qquad\qquad I_2 = \int_{S_2} \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{S}_2$$

(el signo negativo de la primera integral se debe a la diferente orientación del vector normal). Tenemos entonces que

$$-I_1 + I_2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad I_1 = I_2$$

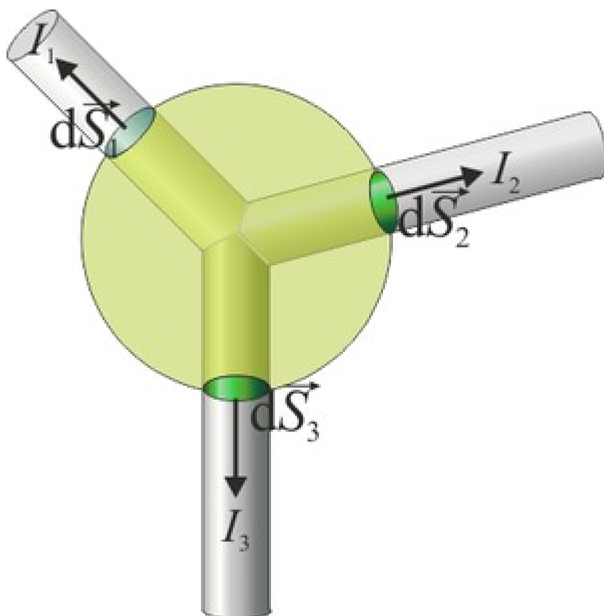
lo cual expresa una propiedad bastante intuitiva: por un conductor por el que circula una corriente estacionaria, la intensidad de corriente es la misma para cualquier sección que tomemos, o dicho en términos aun más llanos, que todas las cargas que entran por un sitio deben salir por el otro.

En términos de teoría de circuitos esto implica que:

> *Dado un conjunto de elementos puestos en serie, la intensidad de corriente es la misma en todos ellos.*

En el caso de un conductor de sección variable, se deduce que la densidad de corriente es mayor donde la sección es menor y viceversa.

5.2 Ley de Kirchhoff para los nodos



Lo anterior vale para el caso de que la corriente fluya a lo largo de una sola rama. ¿qué ocurre si tenemos varias ramas conectadas en un nodo

de un circuito? En ese caso, el razonamiento es una extensión del anterior. Considerando una superficie cerrada alrededor del nodo, que cortará a las diferentes ramas en las secciones en las superficies S_1, S_2, … S_n. Al ser nula la integral sobre la superficie cerrada obtenemos

$$0 = \oint_S \vec{J}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \sum_k \int_{S_k} \vec{J}\cdot\mathrm{d}\vec{S}_k$$

o, en términos de las intensidades de corriente

$$\sum_k I_k = 0$$

donde consideramos todas las corrientes como saliendo del nodo (lógicamente, algunas serán positivas y otras negativas). Esta es la conocida como ley de Kirchhoff para los nodos (o primera ley de Kirchhoff).

Si distinguimos las corrientes que llegan al nodo y las que salen de él con su signo correspondiente, queda

$$\sum_k I_k^{\mathrm{in}} = \sum_p I_p^{\mathrm{out}}$$

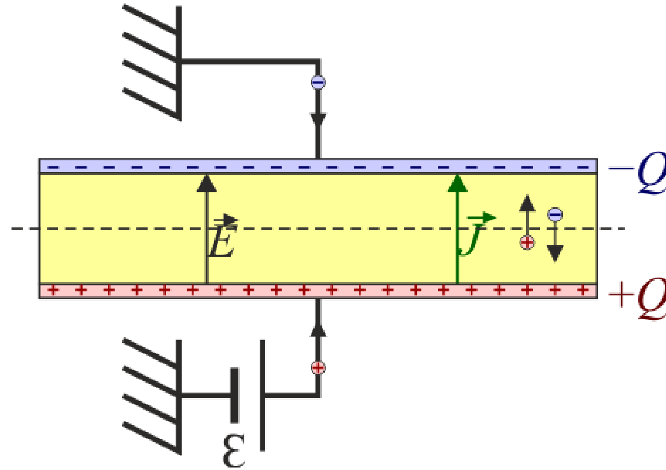
es decir, que la suma de las corrientes que llegan al nodo es igual a la suma de las que salen de él. De nuevo, esta es una propiedad intuitiva. Si a un nodo llega una corriente I_0 y del nodo salen dos ramas, la corriente se repartirá entre ambas, de forma que

$$I_0 = I_1 + I_2$$

En particular, este resultado nos dice que dada una asociación de elementos en paralelo, la intensidad corriente total que circula por la asociación es la suma de las que van por cada una de las ramas.

5.3 Condensador real

Si tenemos un condensador con pérdidas, es decir, el material entre las placas no es un dieléctrico perfecto, sino que permite un cierto flujo de carga por su interior debemos considerar la variación de la carga en las placas y las corrientes que fluyen por el cable y por el medio material.



Si consideramos una superficie S que envuelve a la placa positiva, la ley de conservación de la carga nos da

$$-\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \oint \vec{J}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \int_{\mathrm{cable}} \vec{J}\cdot\mathrm{d}\vec{S} + \int_{\mathrm{medio}} \vec{J}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

Al considerar el flujo a través de la superficie S la normal va hacia afuera, pero si llamamos I a la intensidad de corriente que llega por el cable se cumple la relación

$$I = \int_{\mathrm{cable}} \vec{J}\cdot(-\mathrm{d}\vec{S}) = -\int_{\mathrm{cable}} \vec{J}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

y por tanto la ley de conservación de la carga nos da

$$-\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -I + \int_{\mathrm{medio}} \vec{J}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

o, equivalentemente,

$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \int_{\mathrm{medio}} \vec{J}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

La corriente que llega a este elemento en parte se va en variar la carga almacenada (*componente capacitiva*) y en parte se escapa por el material (*componente resistiva*).

Esta ley admite varios casos particulares de interés:

Corriente continua

En el caso de que la tensión entre las placas no dependa del tiempo, la carga en las placas es constante y la relación anterior se reduce a

$$\left(\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=0\right) \qquad I=\int_{\mathrm{medio}}\vec{J}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

En este caso, toda la carga que llega por el cable se escapa por el material. El sistema se comporta como un resistor.

Condensador ideal

Si el medio que hay entre las placas es un dieléctrico perfecto no puede fluir corriente por él y la ecuación se reduce a

$$\left(\vec{J}_{\mathrm{medio}}=\vec{0}\right) \qquad I=\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$$

la corriente que llega se emplea en variar la carga almacenada.

Descarga de un condensador

Si se desconecta el cable de alimentación no llega corriente por el cable y

$$(I=0) \qquad \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=-\int_{\mathrm{medio}}\vec{J}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

En este caso el condensador se va descargando progresivamente, a medida que las cargas de las placas escapan por el material intermedio.

Ley de Ohm

1 Ley de Ohm

En los apartados anteriores hemos descrito el movimiento de las cargas, sin atender a las causas que lo producen. Para tener en cuenta las causas necesitaríamos o bien medir experimentalmente la corriente como función de otros parámetros, o bien analizar los diferentes modelos de conducción, para ver qué relación teórica hay entre la densidad de corriente y el campo eléctrico (y otras fuerzas aplicadas).

El resultado es que en la gran mayoría de las materiales existe una relación sencilla entre la densidad de corriente y el campo eléctrico en el interior del material. Esta relación es la *ley de Ohm*:

$$\vec{J} = \sigma\vec{E}$$

donde σ es una propiedad de cada material conocida como su conductividad. Se mide en el SI en siemens/metro (S/m) y es la propiedad física que más cambia de unas sustancias a otras.

Material	**σ (S/m)**	**ρ (Ω·m)**
Plata	6.29×10^7	1.59×10^{-8}
Cobre	5.96×10^7	1.72×10^{-8}
Oro	4.46×10^7	2.24×10^{-8}
Hierro	1.04×10^7	9.61×10^{-8}
Agua de mar	$\simeq 4$	$\simeq 0.2$
Agua destilada	$\simeq 10^{-4}$	$\simeq 10^4$
Goma	$10^{-15} - 10^{-13}$	$10^{13} - 10^{15}$

A menudo se da como dato la inversa de la conductividad, llamada la *resistividad* (ρ o *r*), que se mide en Ω·m.

$$r = \rho = \frac{1}{\sigma} \qquad \rightarrow \qquad \vec{E} = r\vec{J}$$

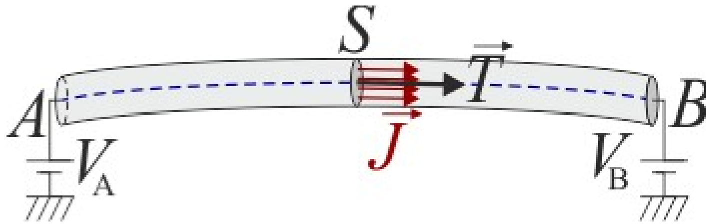
La ley de Ohm nos dice sencillamente que si las cargas se mueven es porque hay un campo eléctrico que las empuja, aunque debido a la fricción con el material, no es la aceleración, sino la velocidad, la que es proporcional al campo eléctrico.

La ley de Ohm no es una ley universal. Solo se cumple en los llamados materiales óhmicos (que son la mayoría) pero no, por ejemplo, en los plasmas.

La excepción más importante de sistema en el que no se cumple la ley de Ohm es en un generador. Como veremos, en un generador la densidad de corriente va en sentido contrario al campo eléctrico, lo cual es la negación absoluta de la ley de Ohm.

1.1 Aplicación a un conductor filiforme

La ley de Ohm así enunciada no es como suele aparecer en los libros de teoría de circuitos. La razón es que al analizar un circuito no interesa tanto lo que ocurre en cada elemento de volumen, y sí lo que ocurre a nivel macroscópico, mediante magnitudes medibles de forma sencilla como la intensidad de corriente y la diferencia de potencial.



Para llegar a la ley de Ohm tal como se ve en teoría de circuitos consideramos en primer lugar el caso de un conductor filiforme (un hilo), que es aquél que tiene una longitud mucho mayor que su diámetro y que su radio de curvatura. Este hilo va de un punto A a un punto B, siguiendo una cierta curva (no tiene por qué ser una recta). Suponemos que la intensidad de corriente fluye de A a B. Nos preguntamos por la diferencia de potencial entre los dos extremos. Por definición de d.d.p. tenemos que

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

Puesto que en el cable se cumple la ley de Ohm

$$V_A - V_B = \int_A^B \frac{\vec{J}}{\sigma}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

Al recorrer la curva que constituye un conductor filiforme el desplazamiento va en la dirección del vector tangente

$$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}l\,\vec{T}$$

Por otro lado, por ser muy estrecho, la densidad de corriente va también en el sentido longitudinal

$$\vec{J} = J\vec{T}$$

lo que nos deja la d.d.p como la integral escalar

$$V_A - V_B = \int_A^B \frac{J\,\mathrm{d}l}{\sigma}$$

En el caso de un conductor filiforme se cumple además que la densidad de corriente es la misma en todos los puntos de una sección transversal, de forma que podemos hacer la aproximación

$$J = \frac{I}{S}$$

siendo I la intensidad de corriente que circula por el cable. Esta intensidad es la misma a lo largo de todo él, por lo que podemos sacarla de la integral y nos queda finalmente

$$V_A - V_B = I\int_A^B \frac{\mathrm{d}l}{\sigma S} = IR \qquad\qquad R = \int_A^B \frac{\mathrm{d}l}{\sigma S}$$

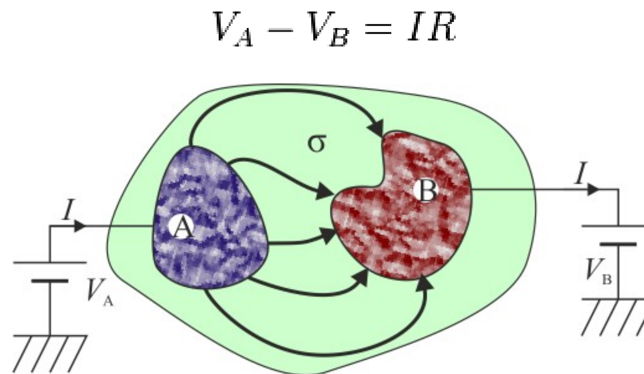
La cantidad R es la *resistencia eléctrica* del hilo. Es una integral porque, en principio, la conductividad y la sección pueden ir variando a lo largo del cable. En el caso común de un cable de un solo material con sección constante

$$R = \int_A^B \frac{\mathrm{d}l}{\sigma S} = \frac{L}{\sigma S} = \frac{rL}{S} \qquad (\sigma, S \text{ constantes})$$

2 Resistencia eléctrica

Acabamos de ver que en un cable hecho de un material óhmico se cumple una relación de proporcionalidad entre la diferencia de potencial entre sus extremos y la intensidad de corriente que circula por el cable

$$V_A - V_B = IR$$



Esta es la llamada ley de Ohm en la teoría de circuitos y es generalizable a gran variedad de situaciones aunque no tengamos un hilo. Siempre que haya dos electrodos entre los cuales se encuentra un material (o materiales) óhmicos, se cumple esta misma relación, aunque

el valor de la resistencia será una función complicada de la geometría y los materiales interpuestos.

La resistencia eléctrica se mide en ohmios (Ω) definidos como

$$1\,\Omega = \frac{1\,\mathrm{V}}{1\,\mathrm{A}}$$

La ley de Ohm circuital también puede escribirse

$$I = \frac{V_A - V_B}{R} = G(V_A - V_B)$$

donde

$$G = \frac{1}{R}$$

es la *conductancia* del sistema, medida en siemens (S)

$$1\,\mathrm{S} = 1\,\Omega^{-1} = \frac{1\,\mathrm{A}}{1\,\mathrm{V}}$$

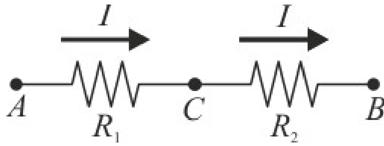
En las expresiones anteriores, para que salgan los signos correctos, si se halla la diferencia de potencial entre A y B, hay que suponer que la corriente va de A a B. Si se da la vuelta a ambas magnitudes, sigue saliendo el resultado correcto, pero si solo se la da la vuelta a una resulta el signo incorrecto.

Un elemento de circuito caracterizado por poseer una resistencia eléctrica se denomina un *resistor* (del mismo modo que uno que tiene capacidad es un condensador), aunque se usa a menudo la palabra *resistencia* tanto para el dispositivo como para su propiedad. Su símbolo es una línea quebrada o un rectángulo.



2.1 Asociaciones de resistencias

De manera análoga a los condensadores, los resistores pueden combinarse para formar un circuito con múltiples elementos. Como con los condensadores tenemos dos casos particulares:



Resistencias en serie

cuando no hay ninguna derivación en el punto de conexión, de manera que toda la corriente que pasa por una pasa por la otra

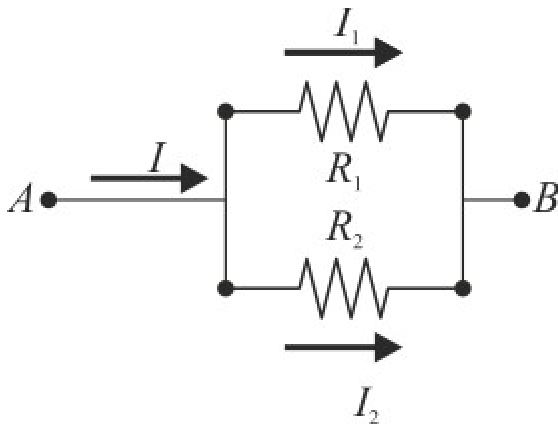
$$I_1 = I_2 = I$$

La diferencia de potencial de la asociación es la suma de las individuales. Si A y B son los extremos y C es el punto de conexión

$$V_A - V_B = V_A - V_C + V_C - V_B = IR_1 + IR_2 = I(R_1 + R_2)$$

por lo que la resistencia equivalente a una asociación en serie de dos resistores es la suma de las resistencias individuales

$$R_{\text{eq}} = R_1 + R_2$$



Resistencias en paralelo

cuando se encuentran conectadas por sus dos extremos A y B de forma que la d.d.p. en ambos resistores es la misma

$$\Delta V_1 = \Delta V_2 = V_A - V_B$$

La corriente que llega a la asociación es en este caso la suma de las dos individuales

$$\frac{\Delta V}{R_{\mathrm{eq}}} = I = I_1 + I_2 = \frac{\Delta V}{R_1} + \frac{\Delta V}{R_2} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\Delta V$$

En una asociación en paralelo la conductancia equivalente es la suma de las conductancias individuales

$$\frac{1}{R_{\mathrm{eq}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \qquad\qquad G_{\mathrm{eq}} = G_1 + G_2$$

2.2 Cortocircuito y circuito abierto

Circuito abierto

Un circuito está abierto cuando entre dos puntos se produce una interrupción o se intercala un dieléctrico ideal que impide el paso de corriente. Matemáticamente equivale a decir que entre los puntos se encuentra una conductancia nula (o una resistencia infinita) y por el tramo abierto

$$G = 0 \qquad\qquad R \to \infty \qquad \Rightarrow \qquad I = 0$$

Cortocircuito

Un conector ideal en un circuito es un cable que no tiene resistencia eléctrica, $R = 0$. Esto, por supuesto, constituye una aproximación, pero es razonable si estamos hablando, por ejemplo, de un hilo de cobre con resistencias de miliohmios que conecta dos resistencias de kiloohmios. Gráficamente se representa por una línea simple.
En un conector ideal no hay diferencia de potencial entre sus extremos

$$R = 0 \qquad \Rightarrow \qquad V_B - V_A = IR = 0$$

y por tanto todos sus puntos se encuentran al mismo potencial. Desde el punto de vista del circuito equivalente, todos sus puntos son el mismo. Cuando dos elementos están unidos por un conector ideal se dice que están en cortocircuito. Si se coloca un cortocircuito entre dos puntos situados a una cierta diferencia de potencial, el resultado es una corriente de gran intensidad (idealmente infinita), que puede quemar los dispositivos.

3 Amperímetros y voltímetros

3.1 Amperímetros

Un *amperímetro* (*anmeter* en inglés) es un dispositivo que mide la intensidad de corriente que circula por una rama de un circuito. Recibe su nombre de la unidad de medida de esta magnitud.

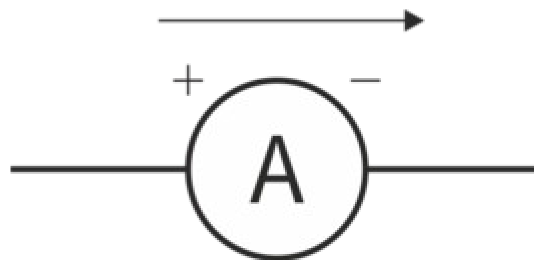
Los principios físicos en los que se basan los amperímetros son variados. Así los hay que miden la desviación en la orientación de una espira en presencia de un campo magnético. También los hay por efecto Hall, que miden la d.d.p. lateral que aparece en un conductor por el que circula una cierta corriente.

En su gran mayoría, los amperímetros se conectan en serie con la rama por la cual circula la corriente que se pretende medir, de forma que ésta lo atraviese.

Si se desea que la lectura del amperímetro corresponda a la corriente que habría si este dispositivo no estuviera presente, es decir, esto obliga a que la resistencia interna de un amperímetro (la que experimenta la corriente al atravesarlo) deba ser pequeña comparada con la del resto de la rama. De no ser así, la corriente se vería reducida y ya la lectura del amperímetro no correspondería a la del circuito sin aparato de medida. En términos de la resistencia de la rama, por estar en serie,

$$R_{\text{rama}} = R_{\text{resto}} + \overbrace{R_{\text{amp}}}^{\simeq 0} \simeq R_{\text{resto}}$$

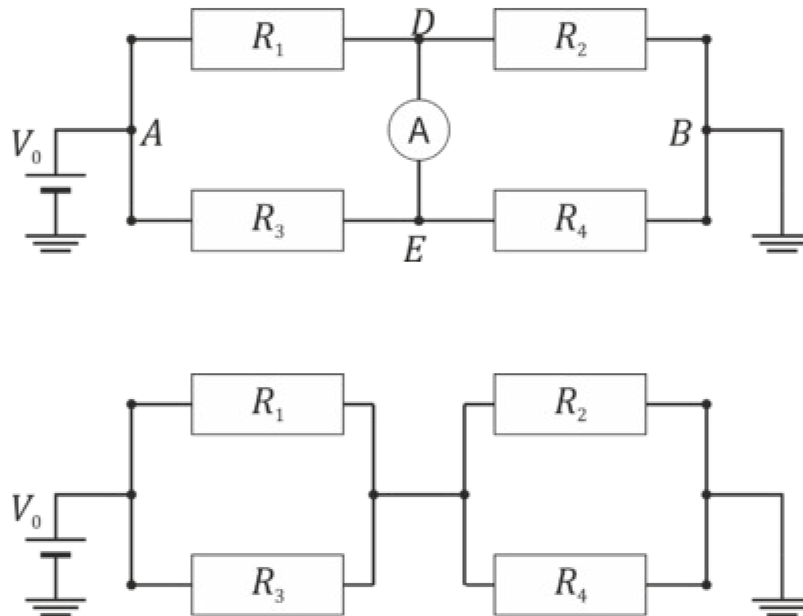
Cuando se trata de medir corriente continua, los amperímetros tienen una *polaridad*, ya que es preciso asignar un signo a la corriente. Uno de sus terminales se toma como positivo y el otro como negativo (también llamado "común"). Se considera que la intensidad de corriente es positiva si va del polo positivo al común y negativa en caso contrario.



En corriente alterna los amperímetros no tienen polaridad, pues la corriente va sucesivamente en los dos sentidos.

Desde el punto de vista de un análisis de circuito, un amperímetro ideal se comporta como un cortocircuito, es decir, la diferencia de potencial entre sus extremos es nula.

Así, en el circuito de la figura, el amperímetro central conecta la rama superior con la inferior mediante un cortocircuito. De esta manera el sistema puede considerarse formado por una asociación en serie de dos asociaciones en paralelo.



Existen amperímetros de corriente alterna que no van a conectados en serie. Son las "pinzas amperimétricas" que rodean al cable por el que circula la corriente. Estas pinzas se basan en la ley de inducción de Faraday para determinar la corriente que circula.

3.2 Voltímetro

Un *voltímetro* es un dispositivo que mide la diferencia de potencial o el voltaje entre dos puntos A y B de un circuito. Para ello, el voltímetro se conecta en paralelo con el resto del circuito, estando una terminal conectada en A y la otra en B.

Como con los amperímetros existen diferentes principios en los que basar un voltímetro. En su versión más simple, un voltímetro se puede construir simplemente colocando una resistencia R_0 en serie con un

amperímetro, de forma que la lectura del amperímetro nos da el voltaje, por simple aplicación de la ley de Ohm

$$\Delta V = I_V(R_{\mathrm{amp}} + R_0) = IR_V$$

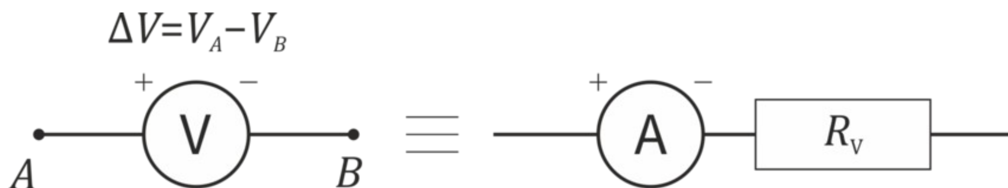
Dado que para que este principio funcione debe haber una corriente que circule por el interior del propio voltímetro, este aparato afecta al resto del circuito (está derivando parte de la corriente). Si se desea que la presencia del voltímetro no afecte al resto del sistema, la resistencia del voltímetro debe ser lo más grande posible (y por tato, la corriente que circula por él, lo menor posible). En términos de la resistencia, por estar en paralelo,

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_{sist}} + \overbrace{\frac{1}{R_V}}^{\simeq 0} \simeq \frac{1}{R_{sist}}$$

Dicho de otra forma, la lectura del voltímetro sería

$$\Delta V = \lim_{R_V \to \infty} I_V R_V$$

En corriente continua, los voltímetros tienen una polaridad, para asignar el signo de la diferencia de potencial. Si el polo positivo del voltímetro está conectado en el punto A y el negativo o común en el punto B, la lectura es $\Delta V = V_A - V_B$.



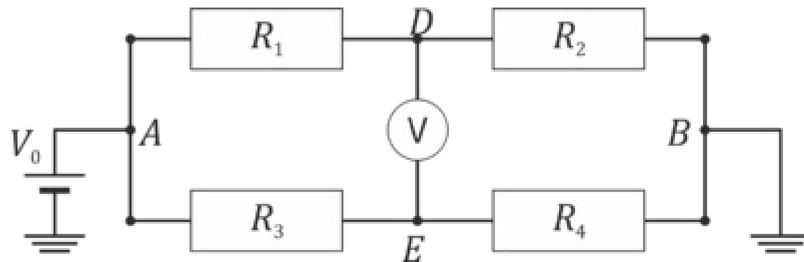
Hay que destacar, porque es importante cuando se estudia la inducción electromagnética, que el voltímetro no funciona "por telepatía", es decir, realmente no mide la diferencia de potencial entre dos puntos del circuito, sino que mide el voltaje *a lo largo del propio voltímetro*.

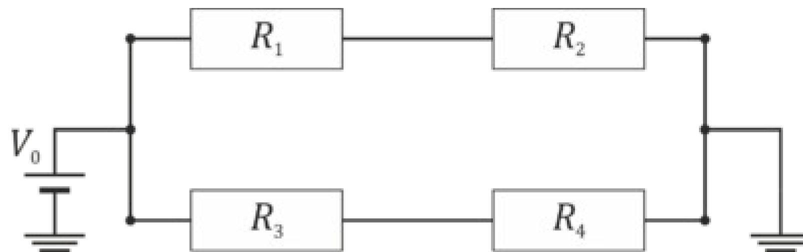
$$\Delta V = {}_V\!\int_A^B \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

En la mayoría de los casos esta lectura coincidirá con el voltaje medido sobre el propio circuito, por la independencia del camino, pero como se ve al estudiar la ley de Faraday esto no siempre es cierto.

Desde el punto de vista de un análisis de circuito, un voltímetro ideal se comporta como un circuito abierto, es decir, por él no circula corriente.

Así, en el circuito de la figura, el voltímetro central no conecta la rama superior con la inferior y estas pueden suponerse en paralelo.





Nótese la importancia de leer correctamente el circuito, ya que los resultados con un voltímetro son diferentes del mismo circuito con un amperímetro, visto anteriormente.

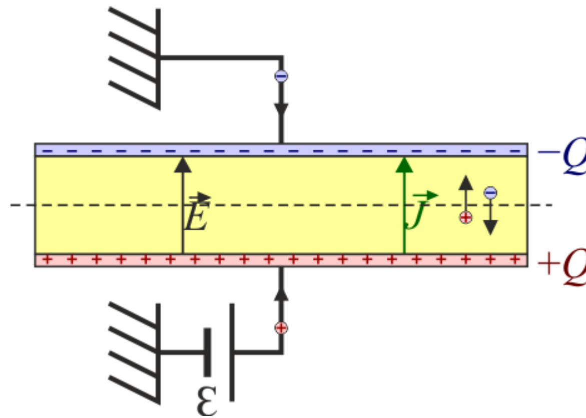
4 Condensador real

Si tenemos un condensador con pérdidas, es decir, el material entre las placas no es un dieléctrico perfecto, sino que permite un cierto flujo de carga por su interior. En este caso, el material vendrá caracterizado por una permitividad εy una conductividad σ. En el caso de un condensador plano, la capacidad y la resistencia del elemento pueden calcularse como

$$C = \frac{\varepsilon S}{b} \qquad\qquad R = \frac{b}{\sigma S}$$

La corriente que llega a este elemento se compone de una parte capacitiva y de una parte resistiva

$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \int \vec{J}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$



Ambos términos se pueden poner en función de la diferencia de potencial entre placas

$$Q = C\,\Delta V \qquad\qquad \int \vec{J}\cdot\mathrm{d}S = \frac{\Delta V}{R}$$

lo que da, para la corriente que llega por el cable

$$I = C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta V) + \frac{\Delta V}{R}$$

Puesto que el resultado da que la corriente que llega al dispositivo es suma de dos términos: corriente capacitiva y corriente resistiva

$$I = I_C + I_R$$

por lo que podemos modelarlo como dos elementos en paralelo:

- Un condensador ideal, de resistencia infinita (o conductancia cero) por el cual fluye una corriente capacitiva

  $$I_C = C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\Delta V\right)$$

  vemos que para que por un condensador ideal fluya una corriente, la tensión debe ser una función variable en el tiempo. En

corriente continua un condensador es un circuito abierto y por él no fluye corriente.

- Una resistencia ideal, sin capacidad, por la cual fluye la corriente resistiva

$$I_R = \frac{\Delta V}{R}$$

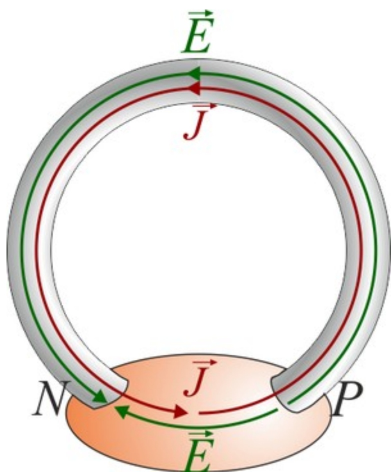
Hay que recordar que aunque el circuito equivalente esté formado por dos elementos, en realidad estamos describiendo un solo dispositivo: el condensador real.

En corriente continua solo está la componente resistiva, pero anque no haya componente capacitiva, eso no quiere decir que el condensador esté cargado, solo que su carga no cambia. Podemos preguntarnos cómo es que la carga no cambia si la conductividad del material permiten que las cargas de una placa se vayan a la otra. La explicación es que lo que no cambia es el valor de la carga, pero no las cargas individuales. Cuando un electrón abandona la placa negativa para irse a la positiva, es reemplazado por otro electrón, aportado por la fuente de tensión.

Si se desconecta la fuente de tensión, las cargas que fluyen por el material no son reemplazadas y el condensador se descarga.

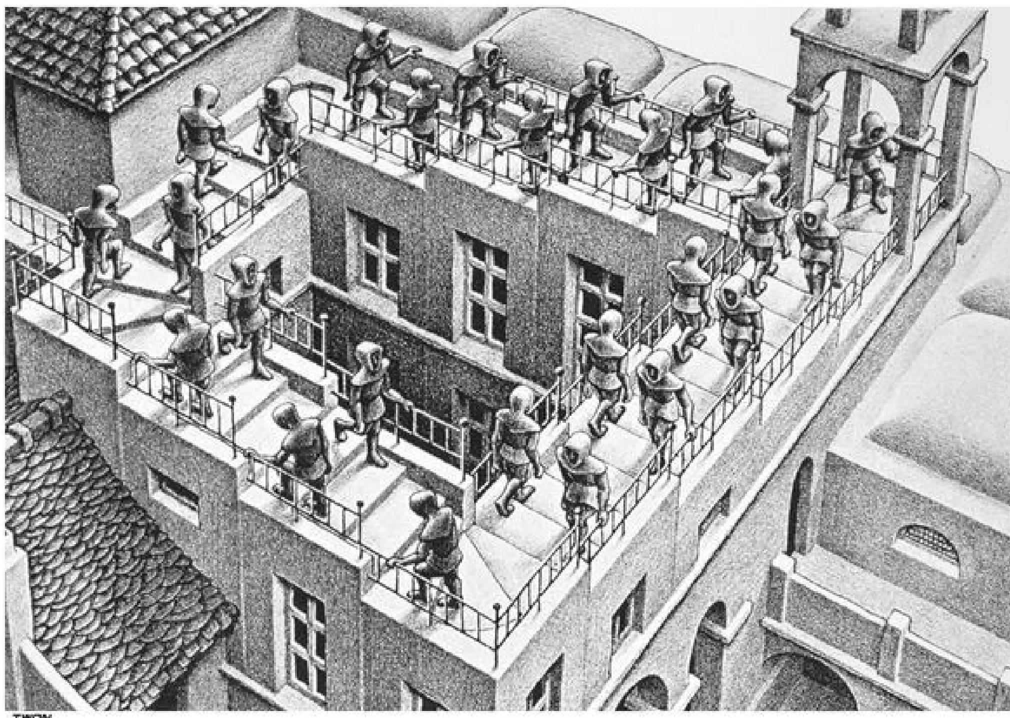
Generadores

1 Definición



Es fácil demostrar que en un circuito cerrado no es posible que se cumple la ley de Ohm en todos sus puntos. Supongamos dos puntos del circuito P y N tales que $V_P > V_N$ y que estos puntos están conectados por un cable de resistencia R en este caso habrá una corriente fluyendo de P a N y en el cable la densidad de corriente y el campo eléctrico irán en el mismo sentido. Pero, ¿qué ocurre al cerrar el circuito? Para obtener una corriente continua la intensidad de corriente debe ir de N a P por el resto del circuito, pero el campo eléctrico, que va de mayor a menor potencial, va de P a N. Por tanto, debe haber una porción de circuito en la cual la densidad de corriente vaya en sentido contrario al campo eléctrico. La parte del circuito en que esto ocurre se denomina el *generador* (o *fuente*).

Un circuito en el que la corriente viajara siempre “cuesta abajo” es tan imposible como las escaleras del grabado de Escher (en realidad, algo menos imposible). Las cargas positivas y las negativas harían el papel de los caminantes en la escalera



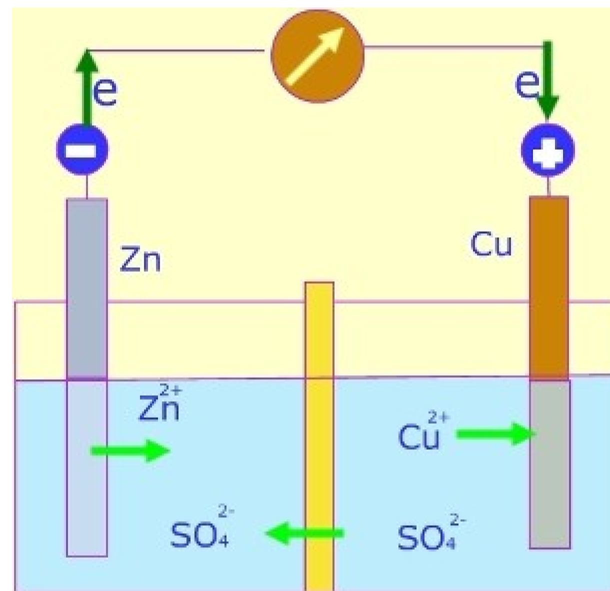
Un generador es entonces un elemento de circuito en el que la densidad de corriente va en sentido opuesto al campo eléctrico (no cumpliéndose por tanto la ley de Ohm) o en términos de circuitos, que la corriente va de menor a mayor potencial. Un generador, por tanto, viene a ser equivalente a una bomba que eleva el agua hasta una cierta altura, venciendo la fuerza de la gravedad.

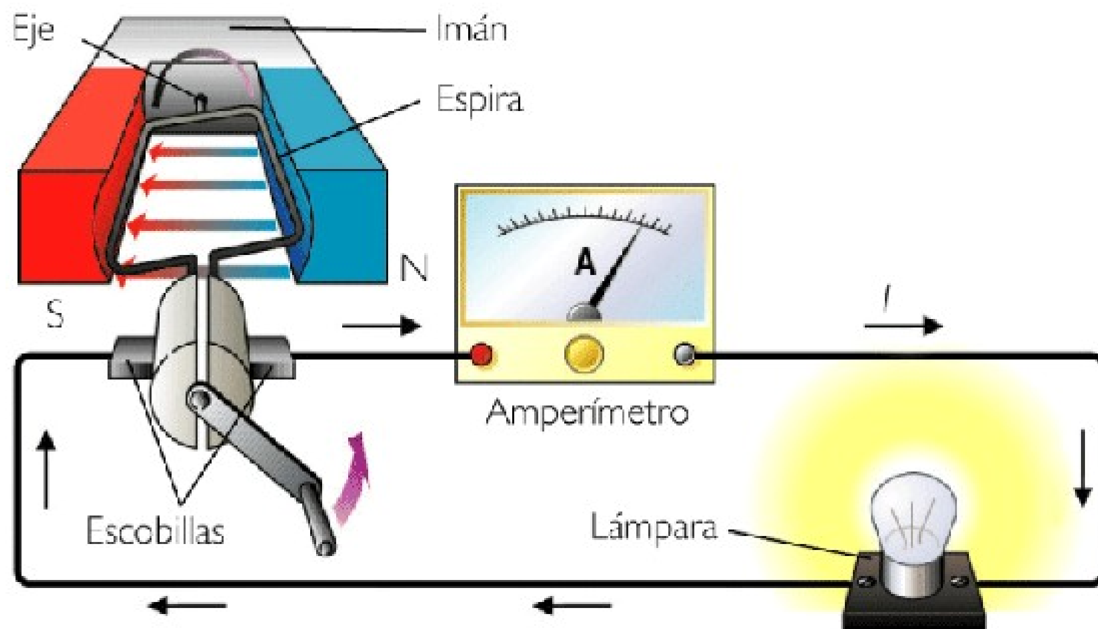
Para hacerlo debe haber una fuerza actuando sobre las cargas, además de la fuerza eléctrica

$$\vec{F} = q\vec{E} + \vec{F}'$$

Esta fuerza adicional no puede ser debida a un campo electrostático. Entre los distintos tipos de generadores tenemos fuerzas:

- **Mecánicas**, en la que la carga es arrastrada contra el campo eléctrico.
- **Químicas**, como en las pilas o baterías, donde una reacción química separa las cargas positivas de las negativas.
- **Magnéticas**, como en los generadores industriales, alternadores o dinamos.
- **Eléctricas no electrostáticas**. En el fenómeno de la inducción electromagnética, un campo magnético variable es capaz de producir un campo eléctrico lo que también se aplica en alternadores y dinamos.


e
e
Zn
Cu
Zn^{2+}
Cu^{2+}
SO_4^{2-}
SO_4^{2-}

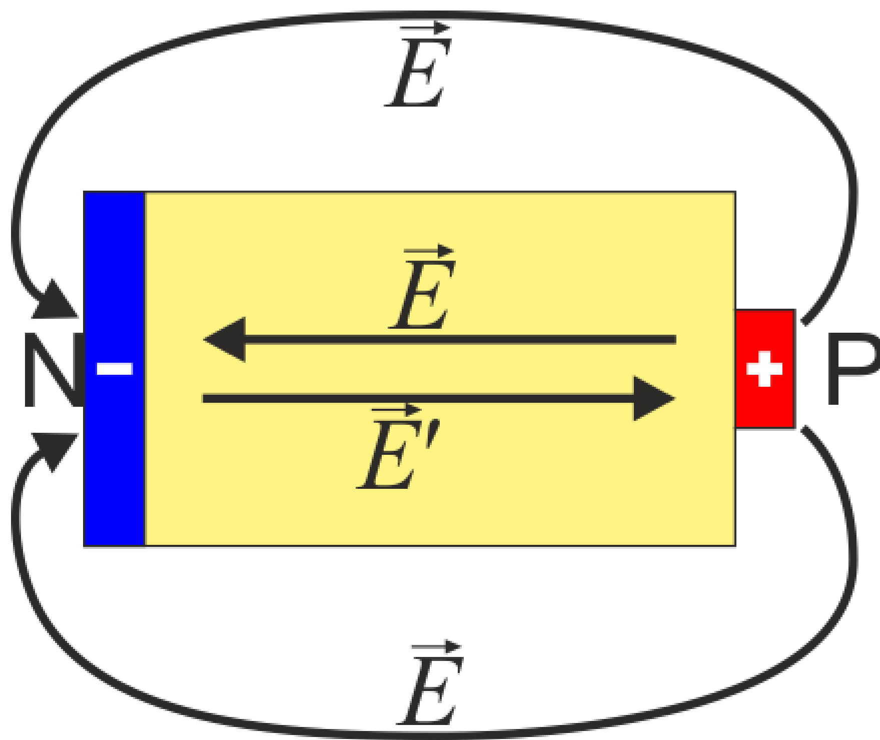

Eje
Imán
Espira
N
S
A
I
Amperímetro
Escobillas
Lámpara



El modelo más sencillo de generador mecánico es el Van de Graaff, encontrándose el más grande del mundo en el Museo de la Ciencia de Boston. Un generador Van de Graaff se basa en primer lugar en separación de carga por fricción (o de otras formas) y su arrastre por una cinta aislante. Mediante un par de electrodos se consigue acumular carga positiva en un sitio (la corona exterior en el esquema) y negativa en otro (la tierra y el electrodo a tierra). En el propio generador el campo va de las cargas positivas a las negativas (hacia abajo en el esquema) pero la corriente va en sentido contrario (en el esquema descienden cargas negativas, lo que supone una corriente hacia arriba).

El circuito se cierra colocando algún cable o simplemente por descargas a través del aire. En el exterior la corriente va de las cargas positivas a las negativas, como es de esperar.

Todos los generadores se caracterizan por tener un polo positivo o ánodo (P) y un polo negativo o cátodo (N), en los que se acumulan las cargas de cada signo. La separación de cargas produce un campo eléctrico que tiende a reunirlas. La separación es conseguida por las fuerzas no electrostáticas que igualan o superan a las eléctricas.



La fuerza por unidad de carga puede escribirse en la forma

$$\frac{\vec{F}}{q} = \vec{E} + \frac{\vec{F}'}{q} = \vec{E} + \vec{E}'$$

donde $\vec{E}'$ no es un verdadero campo eléctrico, sino un campo efectivo, que mide la fuerza adicional que actúa sobre las cargas. Este campo efectivo solo existe dentro de los generadores.

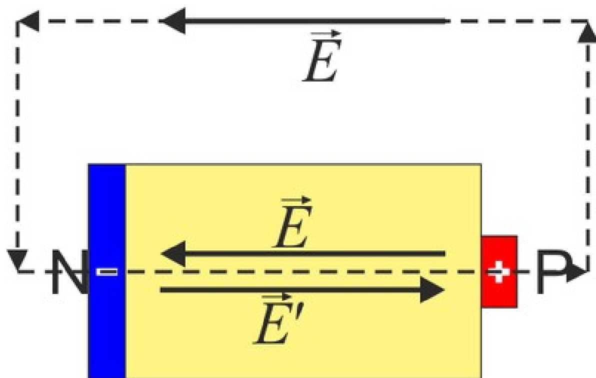
2 Fuerza electromotriz y resistencia interna

Para medir cómo de potente es un generador se define la *fuerza electromotriz* (f.e.m.) $\mathcal{E}$. Para ello se considera una curva cerrada que va del polo positivo al negativo del generador por su exterior y de N a P por el interior. La fuerza electromotriz es igual al trabajo por unidad de carga para recorrer esta curva cerrada

$$\mathcal{E} = \frac{W}{q} = \oint \frac{F}{q} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \oint (\vec{E} + \vec{E}') \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

De la definición se ve que la f.e.m. no es una fuerza en absoluto, ya que se mide en voltios (V).

2.1 Valor en circuito abierto



Un circuito está abierto cuando hay una interrupción en él que impide que circule la corriente (por ejemplo, una pila no conectada a nada estaría en circuito abierto). La fuerza electromotriz se puede descomponer en suma de dos integrales

$$\mathcal{E} = \underset{\text{ext}}{\int_P^N} (\vec{E} + \overbrace{\vec{E}'}^{=\vec{0}}) \cdot \mathrm{d}\vec{r} + \underset{\text{int}}{\int_N^P} \overbrace{(\vec{E} + \vec{E}')}^{=\vec{0}} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

En el tramo exterior el campo efectivo es nulo porque éste solo existe dentro de los generadores. En el interior, puesto que no hay corriente y las cargas están en reposo, la fuerza sobre cada una se anula

$$\vec{0} = \frac{\vec{F}}{q} = \vec{E} + \vec{E}'$$

por lo que la fuerza electromotriz se reduce a

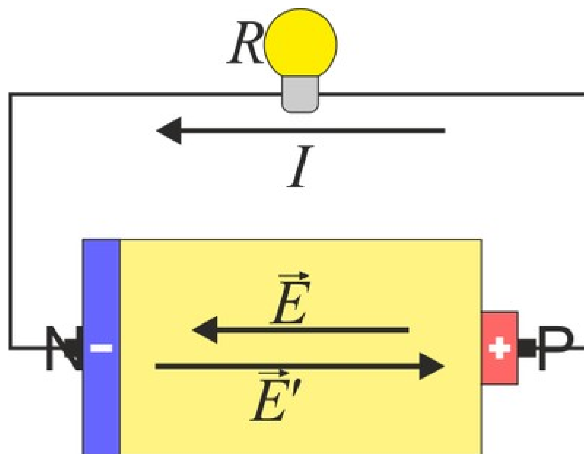
$$\mathcal{E} = \int_{\text{ext}\,P}^{N} \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

pero esta integral no es otra que la diferencia de potencial

$$\mathcal{E} = V_P - V_N$$

Por tanto, la diferencia de potencial entre los polos coincide con la fuerza electromotriz en circuito abierto. Esto nos proporciona un método sencillo de medir la f.e.m de una fuente: basta colocar un voltímetro entre sus polos cuando no está conectada a nada.

2.2 Valor en circuito cerrado



Cuando la fuente está conectada a un circuito ya habrá en general una corriente circulando por su interior. Al salir la corriente del polo positivo y llegar al negativo se está produciendo una descarga parcial de los polos. Aunque el campo efectivo sigue separando las cargas por

dentro del generador, parte de ellas vuelven por fuera. Al reducirse la cantidad de carga en los polos, el campo eléctrico se reduce y ya dentro del generador

$$\vec{E}+\vec{E}'\neq\vec{0}$$

la reducción del campo eléctrico depende de cuanta carga se está escapando de los polos en cada momento, es decir de cuánta corriente está circulando. En primera aproximación, será proporcional a la corriente y podemos escribir

$$\int_{\text{int}\,N}^{P}\overbrace{(\vec{E}+\vec{E}')}^{\neq\vec{0}}\cdot\,\mathrm{d}\vec{r}=Ir$$

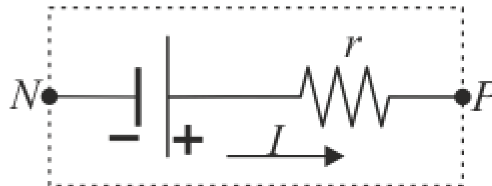
siendo *r* una constante de proporcionalidad que depende de la naturaleza del generador. A esta constante se la denomina *resistencia interna*. Con este cambio, la f.e.m. equivale a

$$\mathcal{E}=\int_{\text{ext}\,P}^{N}(\vec{E}+\overbrace{\vec{E}'}^{=\vec{0}})\cdot\,\mathrm{d}\vec{r}+\int_{\text{int}\,N}^{P}\overbrace{(\vec{E}+\vec{E}')}^{\neq\vec{0}}\cdot\,\mathrm{d}\vec{r}=V_P-V_N+Ir$$

y despejando

$$V_P-V_N=\mathcal{E}-Ir$$

En un circuito cerrado la diferencia de potencial entre los polos es menor que la f.e.m. de la fuente. La diferencia la da el término *Ir* que podemos leer como la d.d.p. en una resistencia *r*.



El circuito equivalente a una fuente de tensión real está formado por dos elementos: una fuente ideal (sin resistencia interna), que se indica con dos líneas desiguales, siendo la más corta el polo negativo, puesta en serie con una resistencia *r*.

3 Ley de Ohm generalizada

Supongamos que tenemos un circuito sencillo formado por un generador real al que se conecta una resistencia R (como podría ser una bombilla). En este caso, tenemos por un lado que

$$V_P - V_N = \mathcal{E} - Ir$$

y por otro que es esta d.d.p. la que alimenta la bombilla

$$V_P - V_N = IR$$

Igualando y despejando nos queda

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}$$

que constituye la ley de Ohm generalizada: la corriente en un circuito simple es igual a la f.e.m. dividida por la suma de todas las resistencias, tanto externas como internas.

En este caso la tensión a la salida de la fuente es

$$V_P - V_N = \frac{\mathcal{E}R}{R + r} < \mathcal{E}$$

4 Ley de Kirchhoff para las mallas

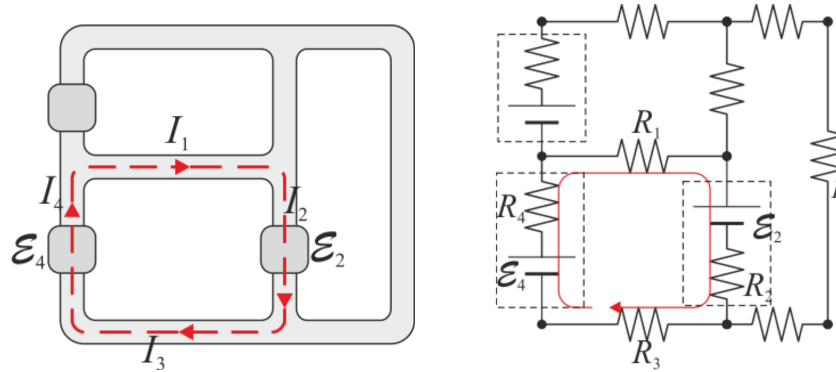
La ecuación anterior se generaliza un circuito general. Una malla es un circuito cerrado, aunque puede tener derivaciones, de forma que la intensidad de corriente no tiene el mismo valor en todos los puntos. Además puede haber varios generadores en la malla. En ese caso, cuando recorremos la malla se verifica

$$\sum_i \mathcal{E}_i = \sum_j I_j R_j$$

donde las R_j son todas las resistencias (tanto internas como externas) e I_j es la corriente que va por cada una. Las fuerzas electromotrices son

positivas si se recorren del polo negativo al positivo, y negativas si se recorren en sentido contrario.

Esta es la ley de Kirchhoff para las mallas (o segunda ley de Kirchhoff).



En el circuito de la figura tendríamos, para la malla señalada

$$\mathcal{E}_4 - \mathcal{E}_2 = I_1R_1 + I_2R_2 + I_3R_3 + I_4R_4$$

y relaciones análogas para las otras dos mallas.

En muchos casos, en lugar de trabajar directamente con esta ley es preferible emplear los voltajes de los distintos nodos y razonar a partir de ellos.

5 Potencia de un generador

Un generador tiene también un aspecto energético. En un circuito cerrado, se disipa energía en las resistencias, en las que se produce calor. Si no hay aporte externo al sistema, esa energía disipada debe proceder de otra parte del circuito. Esa otra parte son los generadores, que no solo producen la corriente, sino que aportan la potencia eléctrica asociada a ellas.

Sabemos que en un sistema con varios puntos de entrada y salida de corriente, el flujo de trabajo (potencia) se puede calcular como

$$\dot{W}_{\text{in}} = \sum_i I_i V_i$$

En el caso de un generador se aplica la misma ley. Por tanto

$$\dot{W}_{\text{in}} = I_N V_N + I_P V_P$$

Ahora bien, dentro de un generador, la corriente va del polo negativo al positivo, por lo que

$$I_N = I \qquad\qquad I_P = -I$$

lo que da

$$\dot{W}_{\text{in}} = I(V_N - V_P) = -I(V_P - V_N)$$

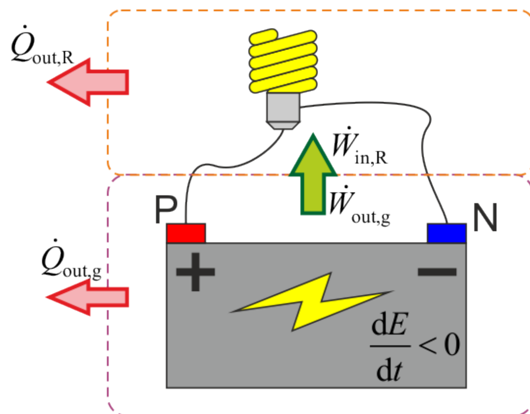
Puesto que el polo positivo se encuentra a un mayor voltaje que el negativo, vemos que este flujo de trabajo es negativo, es decir, que realmente está saliendo energía eléctrica del generador (como debe ser). Podemos ponerlo con signo positivo considerando un flujo de trabajo hacia afuera

$$\dot{W}_{\text{out}} = +I(V_P - V_N)$$

Si sustituimos aquí la diferencia de potencial entre bornes queda

$$\dot{W}_{\text{out}} = I(\mathcal{E} - Ir) = I\mathcal{E} - I^2 r$$

que podemos leer como que la energía que escapa del generador es la que daría un generador ideal (sin resistencia interna) menos la que se consume en el propio generador (por la presencia de r).



Si consideramos un circuito simple, formado por un generador real y una resistencia externa R, entonces podemos dividir el circuito en dos sistemas. En la resistencia

$$\dot{W}_{\text{in,R}} = I(V_P - V_N) = I^2 R$$

y en el generador

$$\dot{W}_{\text{out,g}} = \mathcal{E}I - I^2r$$

Puesto que no hay aporte externo de energía, lo que sale de uno es lo que entra en el otro

$$\dot{W}_{\text{out,g}} = \dot{W}_{\text{in,R}} \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{E}I - I^2r = I^2R \qquad \Rightarrow \qquad I = \frac{\mathcal{E}}{R+r}$$

Vemos que la ley de Ohm generalizada es equivalente a la ley de conservación de la energía para este caso.

¿De donde procede la potencia eléctrica que sale del generador? De la fuerza no eléctrica que está actuando sobre las cargas. Como la bomba de agua, este fuerza está subiendo las cargas de potencial, realizando un cierto trabajo. Puede ser trabajo mecánico, o puede provenir de la liberación de energía almacenada en los enlaces químicos. De acuerdo con el primer principio de la termodinámica

$$\dot{W}_{\text{out,g}} + \dot{Q}_{\text{out,g}} = -\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$$

Del generador escapa tanto energía eléctrica (como flujo de trabajo) como calor (pues por la resistencia interna se calienta y empieza a radiar calor). Esa energía procede de la energía total almacenada en el sistema. En un sistema aislado, esta energía termina agotándose y la corriente se detiene. Esto es lo que ocurre al descargarse una pila. En la batería de un automóvil se produce una recarga continua a partir de la energía procedente de la combustión de la gasolina. Si no hay recarga (como ocurre al dejarse las luces encendidas por la noche) la batería se termina agotando.

El caso de un generador eléctrico mecánico (como uno unido a una turbina o un aerogenerador), no se está consumiendo energía almacenada, sino que el trabajo eléctrico que sale procede del trabajo mecánico que entra.

Problemas de corriente eléctrica

1.1 Velocidad de arrastre en un hilo de plata

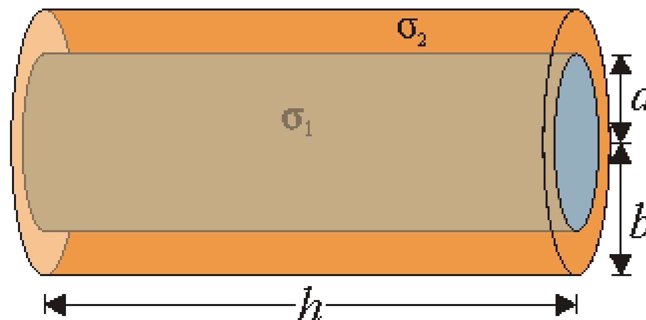
Halle la velocidad de arrastre de los electrones en un cable de plata de 0.5 mm² de sección por el cual circula una corriente de 100 mA.

1.2 Cable bimetálico

Entre los distintos tipos de cable empleados en la industria, se encuentra el de *acero revestido de cobre*. Está formado por un núcleo de acero de radio *a* (suponga $a = 2\,\mathrm{mm}$), rodeado por una capa de cobre, de radio exterior *b* (sea $b = 3\,\mathrm{mm}$).

1. Calcule la resistencia de un cable de esta clase de longitud $h = 10\,\mathrm{km}$.
2. Determine la intensidad de corriente que circula por cada metal cuando se aplica una diferencia de potencial $V_0 = 100\,\mathrm{V}$ al cable anterior.

Datos: $\sigma_{\mathrm{Cu}} = 5.96\times 10^7\,\mathrm{S/m}$, $\sigma_{\mathrm{acero}} = 7.0\times 10^6\,\mathrm{S/m}$



1.3 Paso de un pulso de corriente

Por un hilo rectilíneo de gran longitud y resistencia eléctrica R_1 circula una corriente variable en el tiempo, tal que su valor es

$$I_1(t) = \begin{cases} I_0 t(T-t)/T^2 & 0 < t < T \\ 0 & t < 0 \text{ o } t > T \end{cases}$$

1. Halle la carga que pasa por un punto del hilo entre $t \to -\infty$y $t \to \infty$.
2. Calcule la energía disipada en el cable en el mismo tiempo.

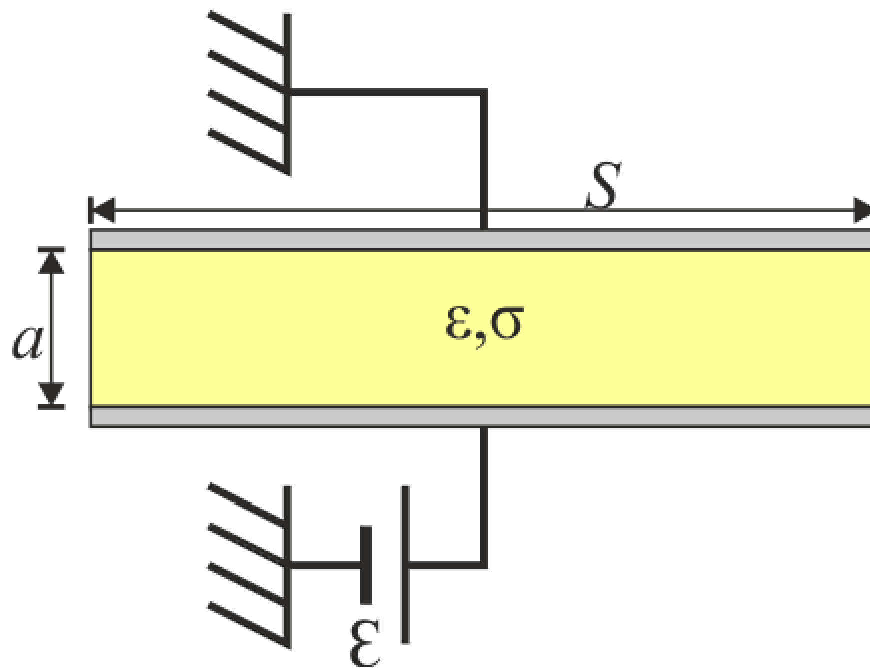
1.4 Asociación de dos bombillas en serie

Se colocan en serie dos bombillas de potencias nominales 10 W y 6 W y se conectan a la red. Si la potencia radiada es proporcional a la potencia consumida, ¿cuál de las dos bombillas darán más luz? ¿En qué proporción?

1.5 Condensador con pérdidas

En un modelo de condensador real ("con pérdidas") se tienen dos placas paralelas perfectamente conductoras de sección *S*, separadas una distancia *a* entre las cuales hay un dieléctrico de permitividad εy con una pequeña conductividad σ. Entre las placas se establece una d.d.p. constante por medio de una fuente de f.e.m $\mathcal{E}$.

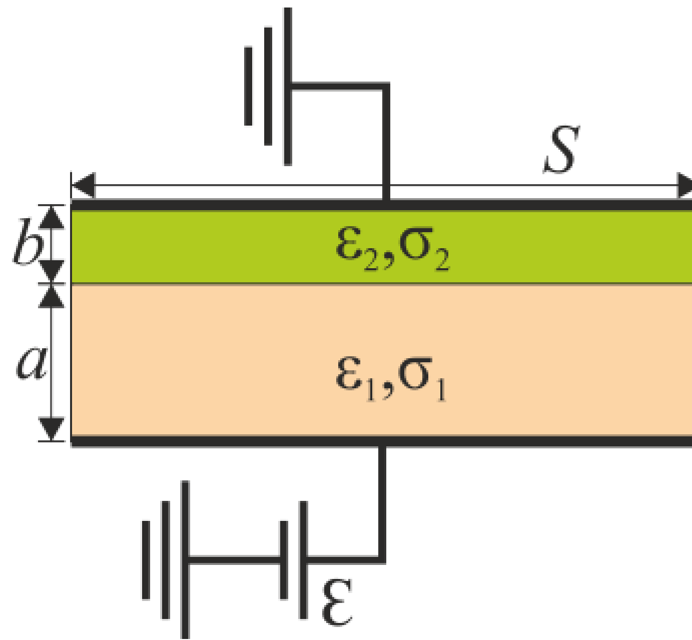
1. Calcule el campo eléctrico y la densidad de corriente entre las placas.
2. Halle la energía almacenada en el sistema y la potencia consumida en el dispositivo.
3. Diseñe el circuito equivalente a este dispositivo.
4. Si la fuente que alimenta a este elemento es una fuente real con f.e.m. $\mathcal{E}$y resistencia interna *r*, ¿cuánto valen en ese caso la carga, la corriente, la energía y la potencia?
5. Si la d.d.p. que se aplica entre las placas no es continua, sino que varía como *V*(*t*), ¿qué corriente llega por el cable al dispositivo?
6. ¿Qué ocurre si se desconecta la fuente?



1.6 Condensador con dos capas no ideales

Entre dos placas perfectamente conductoras de sección *S* separadas una distancia *a* + *b* se encuentran dos capas de dieléctricos no ideales de espesores *a* y *b* respectivamente. Los dieléctricos tienen permitividades ε_1 y ε_2 y conductividades σ_1 y σ_2, respectivamente. Entre las placas se aplica una diferencia de potencial constante mediante de una fuente de f.e.m. $\mathcal{E}$.

1. Diseñe el circuito equivalente a este sistema.
2. Calcule la corriente que atraviesa el dispositivo.
3. Halle la carga en cada una de las placas y en la interfaz central entre los dos dieléctricos.
4. Calcule la potencia disipada y la energía almacenada en el sistema.

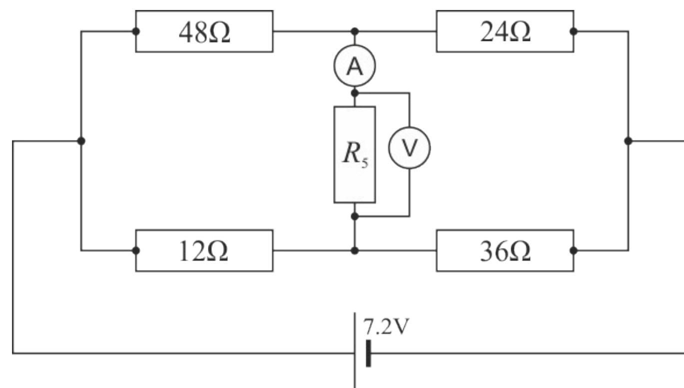


1.7 Sistema de 5 resistencias

Se tiene el sistema de 5 resistencias de la figura. Entre los extremos de la asociación se aplica una diferencia de potencial de 7.2 V.

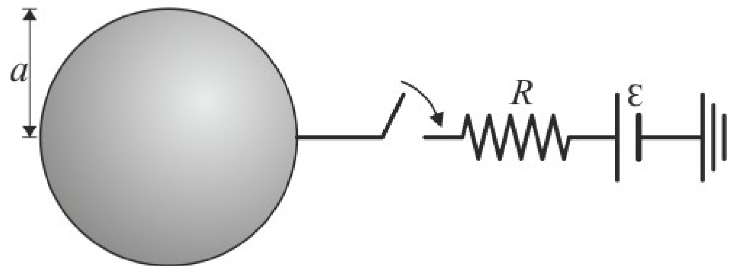
Determine las lecturas del amperímetro y voltímetro de la rama central en los casos:

1. $R_5 = 1\,\mathrm{M}\Omega$
2. $R_5 = 1\,\mathrm{m}\Omega$
3. $R_5 = 25\,\Omega$
4. El valor de R_5 que haga máxima la potencia disipada en ella por efecto Joule.



1.8 Esfera que se conecta a una fuente de tensión

Un conductor metálico esférico de radio 90 cm se encuentra cargado con una carga $Q_1 = 10\,\mathrm{nC}$. Alrededor de la esfera no hay más conductores ni cargas.



1. Halle el potencial al que se encuentra la esfera, así como la energía electrostática almacenada en el sistema.
2. Suponga que ahora se conecta a la esfera una fuente de tensión de 0.3 kV, mediante un cable con una resistencia de 100 Ω. Justo tras la conexión, ¿cuánto vale la corriente que circula por el cable? ¿Está aumentando o disminuyendo la carga de la esfera?
3. Una vez que se ha alcanzado de nuevo el equilibrio electrostático de la esfera, ¿cuál es su nueva carga? ¿Y la nueva energía almacenada en el sistema?
4. ¿Qué trabajo ha realizado la fuente de tensión en el proceso? ¿Cuánta energía se ha disipado en la resistencia?
5. Determine la ecuación diferencial que gobierna el potencial $V(t)$ de la esfera desde que se conecta la fuente hasta que se llega de nuevo al equilibrio electrostático. Indique como sería la representación gráfica de $V(t)$ frente al tiempo.

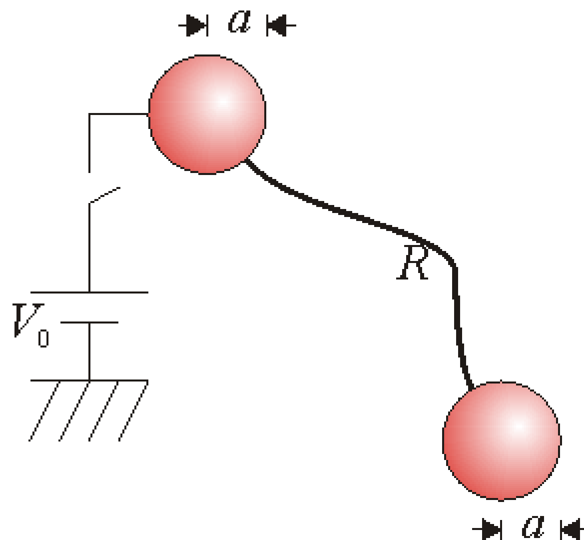
Dato: $1/(4\pi\varepsilon_0) = 9\times 10^9\,\mathrm{m/F}$

1.9 Dos esferas conectadas por una resistencia

Dos esferas metálicas, perfectamente conductoras, de radio a, se encuentran muy alejadas la una de la otra (de forma que no se influyen

entre sí). Las dos esferas se encuentran conectadas mediante un cable de resistencia R. Una de las esferas se encuentra conectada a un generador de tensión V_0, a través de un interruptor que inicialmente se encuentra abierto. Ambas esferas están inicialmente descargadas.

1. Suponga que el interruptor se cierra durante un periodo de tiempo muy corto (el imprescindible para que se cargue la esfera conectada a él) y se vuelve a abrir. Justo tras este intervalo ¿cómo es la distribución de cargas y potenciales en las esferas? ¿Cuánto vale la energía electrostática almacenada en el sistema?
2. Si se deja transcurrir un periodo de tiempo largo, ¿cómo queda la distribución de cargas y potenciales? ¿Cuál es la energía electrostática almacenada en el sistema en el estado final?
3. Determine la evolución en el tiempo de las cargas y potenciales en cada esfera, así como la corriente que circula por el cable.
4. Halle la energía disipada en el cable durante el periodo transitorio y verifique que se satisface el balance energético.
5. Suponga ahora que, en el proceso anterior, el generador no se desconecta, sino que se deja permanentemente conectado a la primera esfera. En ese caso, ¿cómo varía la carga en cada esfera? ¿Y la corriente por el cable? ¿Y la energía disipada y la energía almacenada?



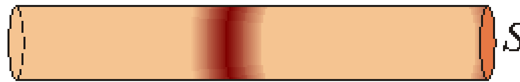
2 Problemas adicionales

2.1 Resistividad dependiente de la posición

Tras una rotura de un cable de cobre (de resistividad r_1) de sección S y gran longitud, se procede a unir los dos pedazos mediante una soldadura. Como consecuencia de la presencia de óxido la resistividad del cable aumenta hasta un valor r_2 en una región alrededor del punto de contacto, pudiéndose describir matemáticamente según la ley

$$r(x) = r_1 + \frac{r_2 - r_1}{1 + (x/a)^2}$$

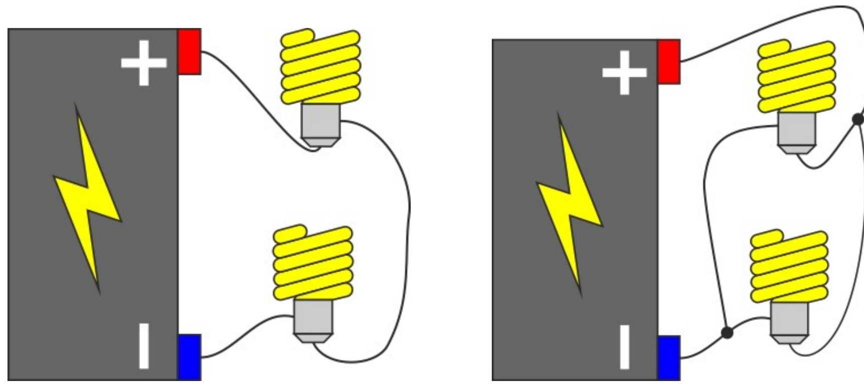
Calcule el aumento de la resistencia total del cable. Aplíquese al caso $S = 1\,\mathrm{mm}^2$, $r_1 = 1.7\times 10^{-8}\,\Omega{\cdot}\mathrm{m}$, $r_2 = 1.1\times 10^{-6}\,\Omega{\cdot}\mathrm{m}$, $a = 2\,\mathrm{mm}$.



2.2 Conexiones de dos bombillas

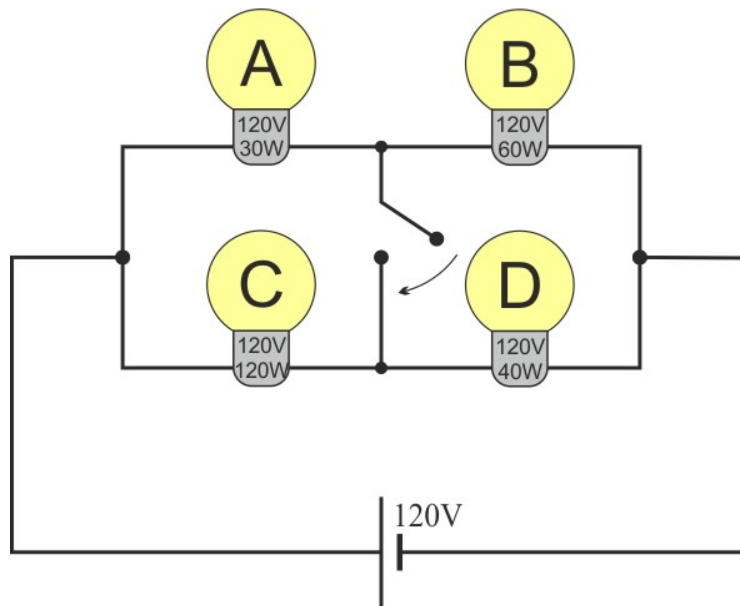
Se desea encender dos bombillas de resistencia R_0, para lo cual se dispone de una batería de f.e.m. $\mathcal{E}$ y resistencia interna r.

1. En un primer montaje se disponen las dos bombillas en serie.
    1. Calcule la intensidad de corriente que circula por cada una.
    2. Halle la potencia que consumen (que dará una medida de la luz que desprenden).
    3. Calcule la potencia desarrollada por el generador y el consumo de energía en el propio generador.
2. A continuación se prueba a montarlas en paralelo.
    1. Calcule la intensidad de corriente que circula por cada una.
    2. Halle la potencia que consumen.
    3. Calcule la potencia desarrollada por el generador y el consumo de energía en el propio generador.
3. ¿En cuál de los dos montajes el conjunto de las dos bombillas dará más luz?
4. Supongamos que tenemos una batería de 10 V y 1 Ω de resistencia interna y dos bombillas en cuya etiqueta pone “10V 25W”, ¿cómo deberemos montarlas para que den el máximo de luz? ¿Cuánta potencia consumirán en ese caso?



2.3 Conexiones de cuatro bombillas

Se dispone de cuatro bombillas, A, B, C, D. El etiquetado de estas bombillas indica que, para un voltaje de 120V, sus potencias nominales son respectivamente 30W, 60W, 120W y 40W. Se montas la cuatro bombillas en el siguiente esquema y se aplica entre los extremos una diferencia de potencial de 120V.

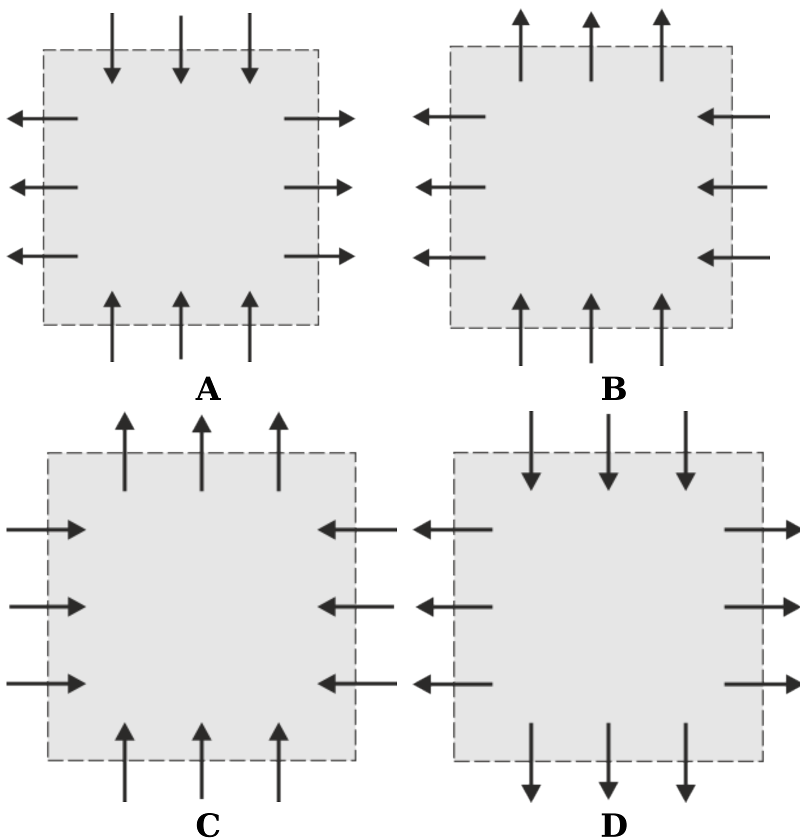


1. Calcule el consumo de cada bombilla (en vatios) para este montaje, así como el consumo total del montaje. ¿Cuál es la que da más luz? ¿Y la que menos?
2. Suponga que se cierra el interruptor central. Una vez cerrado, ¿cuál es el nuevo consumo total y el individual? ¿Cuál es ahora la bombilla más brillante y la menos brillante?

3 Preguntas de test

3.1 Flujo a través de una superficie cerrada

Indique en cuál de los cuatro casos siguientes, la superficie S delimitada por la línea discontinua encierra una carga que está aumentando. Las flechas representan el sentido de la densidad de corriente.



3.2 Conexión de dos hilos

Se tienen dos hilos de 1 mm de diámetro y 1 m de longitud, uno de ellos de cobre ($\sigma = 5.9\times 10^{9}\,\mathrm{S/m}$) y el otro de aluminio ($\sigma = 3.5\times 10^{9}\,\mathrm{S/m}$)

Si los dos hilos se conectan en paralelo y se aplica una diferencia de potencial a la asociación, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

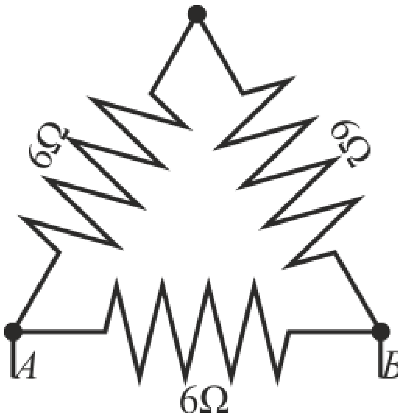
- **A** La densidad de corriente es mayor en el cobre.
- **B** La densidad de corriente es mayor en el aluminio.
- **C** El campo eléctrico es mayor en el cobre.
- **D** La intensidad de corriente es la misma en los dos materiales.

Si los dos hilos se conectan en serie y se aplica una diferencia de potencial a la asociación, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

- **A** La densidad de corriente es mayor en el aluminio.
- **B** El campo eléctrico es mayor en el cobre.
- **C** La densidad de corriente es mayor en el cobre.
- **D** La intensidad de corriente es la misma en los dos materiales.

3.3 Sistema de tres resistencias

Dado el sistema de tres resistencias de la figura,

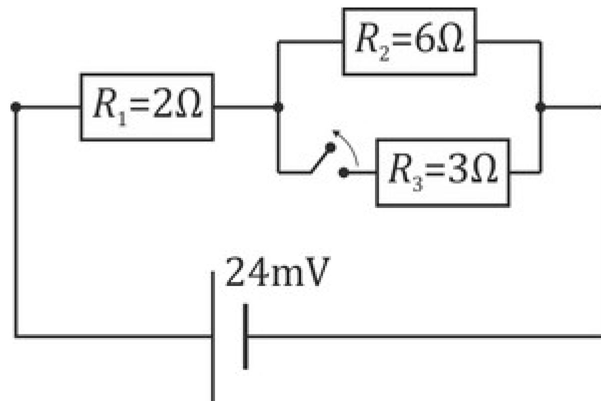


¿cuánto vale la resistencia equivalente entre A y B?

- **A** 9 Ω.
- **B** 18 Ω.
- **C** 2 Ω.
- **D** 4 Ω.

3.4 Circuito con tres resistencias

Se tiene el circuito de la figura.



En un momento dado, se abre el interruptor. Después de ese momento, ¿qué podemos decir de las corrientes que circulan por las resistencias 1 y 2?

- **A** Las dos disminuyen.
- **B** La que pasa por la 1 se queda igual y la de la 2 aumenta.
- **C** La que pasa por la 1 disminuye y la de la 2 aumenta.
- **D** Las dos aumentan.

3.5 Fuente real conectada a dos resistencias

Una fuente de tensión con una f.e.m. de 9.0 V y 1 Ω de resistencia interna se conecta a una asociación en paralelo de dos resistencias de 3 Ω y 6 Ω.

¿Cuánto vale la d.d.p. entre los polos de la fuente de tensión?

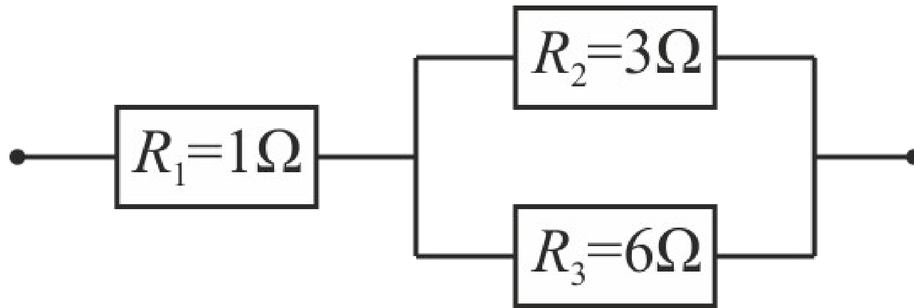
- **A** 8.1 V
- **B** 6.0 V
- **C** No hay información suficiente para saberlo.
- **D** 9.0 V

¿Cuánta potencia se disipa en la asociación en paralelo?

- **A** 7.3 W
- **B** 9 W
- **C** 81 W
- **D** 18 W

3.6 Tres resistencias

Se tiene la asociación de tres resistencias mostrada en la figura



Si por la resistencia R_1 circula una corriente $I_1 = 300\,\mathrm{mA}$, ¿cuánto valen las corrientes por las otras dos?

- **A** No hay información suficiente para determinarlas.
- **B** $I_2 = 100\,\mathrm{mA}$, $I_3 = 200\,\mathrm{mA}$
- **C** $I_2 = 200\,\mathrm{mA}$, $I_3 = 100\,\mathrm{mA}$
- **D** $I_2 = I_3 = 150\,\mathrm{mA}$

Si la diferencia de potencial entre los extremos de R_1 es de 30 V, ¿cuánto valen las diferencias de potencial entre los extremos de las otras dos resistencias?

- **A** $\Delta V_2 = 20\,\mathrm{V}$, $\Delta V_3 = 10\,\mathrm{V}$
- **B** $\Delta V_2 = 90\,\mathrm{V}$, $\Delta V_3 = 180\,\mathrm{V}$
- **C** No hay información suficiente para determinarlas.
- **D** $\Delta V_2 = 60\,\mathrm{V}$, $\Delta V_3 = 60\,\mathrm{V}$

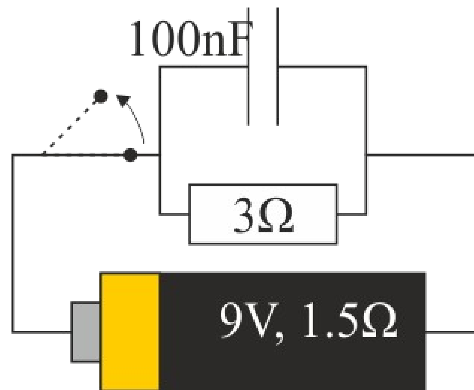
3.7 Fusible

Un fusible es un fino hilo de plomo ($\sigma = 4.55 \times 10^6 \mathrm{S/m}$) de 1 cm de largo y 0.2 mm de diámetro. Si el hilo se funde cuando la potencia disipada en él es de 25 mW, ¿Cuál es, aproximadamente, la máxima corriente que puede circular por este hilo?

- **A** 2.25 A
- **B** 0.6 A
- **C** 5.1 A
- **D** 62 mA

3.8 Fuente real conectada a R y C

Se construye un circuito formado por una fuente de tensión real de f.e.m. 9.0 V y resistencia interna 1.5 Ω conectada a la asociación en paralelo de una resistencia de 3.0 Ω y un condensador ideal de 100 nF



¿Qué potencia se disipa en la resistencia externa?

- **A** 243.0 W
- **B** 12.0 W
- **C** 18.0 W
- **D** 27.0 W

¿Cuánta energía hay almacenada en el condensador?

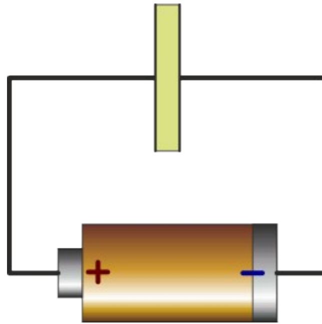
- **A** Ninguna, ya que está cortocircuitado.
- **B** 8.10 µJ.
- **C** 1.80 µJ.
- **D** 3.60 µJ.

Si en este circuito se abre bruscamente un interruptor, desconectando la fuente, ¿qué ocurre?

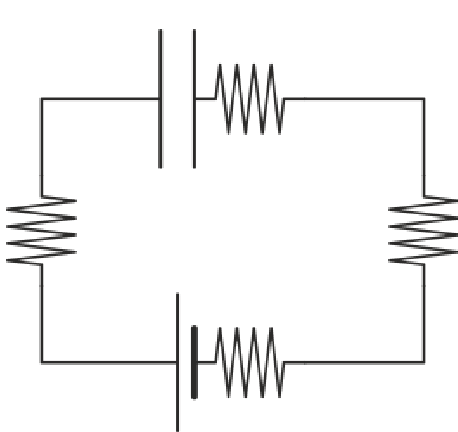
- **A** Fluye una corriente por el condensador, hasta que éste se descarga.
- **B** Deja inmediatamente de circular corriente por el circuito.
- **C** Fluye una corriente por la resistencia externa, hasta que se descarga el condensador.
- **D** Continúa fluyendo una corriente por el interior de la fuente.

3.9 Circuito real

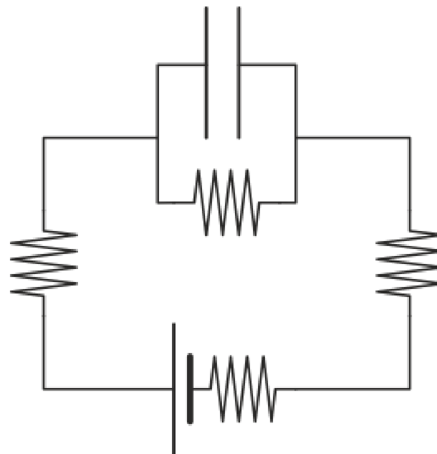
Un circuito real está formado por una pila, que se conecta por sendos cables a las placas de un condensador real, en cuyo interior hay un dieléctrico con permitividad y conductividad no nulas.



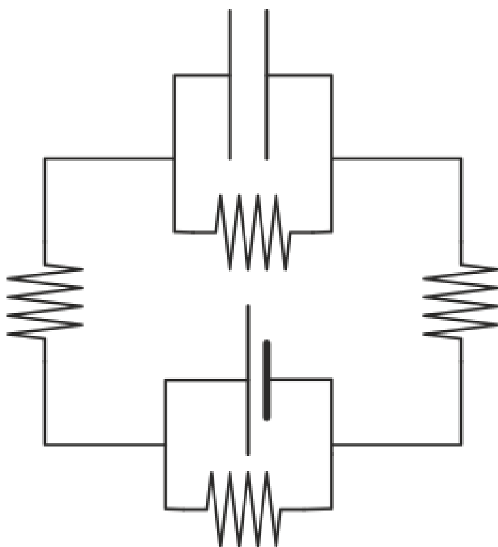
¿Cómo es el circuito equivalente de este sistema?



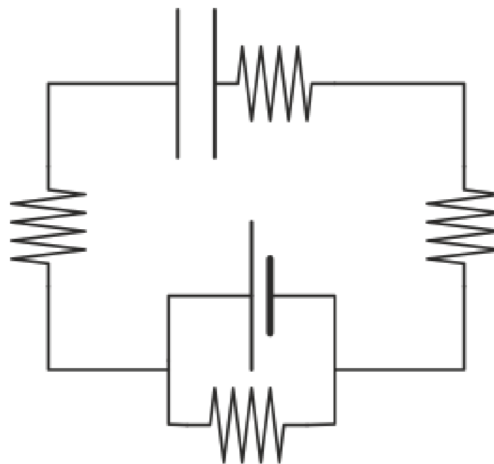
A



B



C



D

3.10 Dos esferas alejadas

Se tienen un sistema de dos esferas conductoras (“1” y “2”) muy alejadas entre sí, de radios $r_1 = 2\,\mathrm{cm}$, y $r_2 = 6\,\mathrm{cm}$, respectivamente,

que pueden unirse por un hilo conductor de 100 Ω. No hay más cargas ni conductores en el sistema. Inicialmente la esfera 1 almacena una carga de 20 nC y la esfera 2 una carga de 40 nC.

Una vez que se conectan por el hilo…

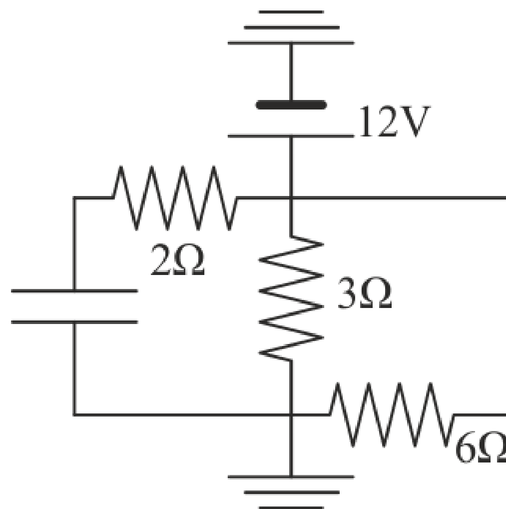
- **A** no fluye corriente alguna por el hilo.
- **B** no hay información suficiente para saber hacia dónde va la corriente.
- **C** fluye una intensidad de corriente que va de la esfera 1 a la 2.
- **D** fluye una intensidad de corriente que va de la esfera 2 a la 1.

Entre el estado inicial y el estado de equilibrio final, ¿cuánta energía se ha disipado en el hilo conductor?

- **A** 7.5 µJ
- **B** 210 µJ
- **C** 15 µJ
- **D** 202.5 µJ

3.11 Circuito con condensador y resistencias

Dado el circuito de la figura,



¿cuánto vale la corriente eléctrica que sale del generador?

- **A** 12 A
- **B** 4 A

- **C** 6 A
- **D** 1.09 A

¿Cuánto vale la diferencia de potencial entre las placas del condensador?

- **A** 0 V
- **B** 12 V
- **C** 4 V
- **D** No hay información suficiente para determinarla.

3.12 Dos hilos en paralelo

Un cable por el que circula una cierta corriente I_0 se separa en dos hilos en paralelo del mismo material y la misma longitud, siendo el “1” de 3 mm de diámetro y el “2” de 1 mm de diámetro. ¿Cómo se reparte la corriente entre los dos hilos?

- **A** El 1 el 90% y el 2 el 10%.
- **B** El 1 el 25% y el 2 el 75%.
- **C** El 1 el 75% y el 2 el 25%.
- **D** El 1 el 50% y el 2 el 50%

Corrientes de intensidad variable

1 Introducción

En general, el movimiento de las cargas es una función del tiempo. No obstante, es de especial interés el caso estacionario (que no estático) en el cual las cargas se mueven pero en un determinado punto del sistema siempre tienen la misma velocidad promedio, de manera que la densidad de corriente es siempre la misma. En ese caso se dice que tenemos *corriente continua*.

En corriente continua todas las derivadas respecto al tiempo son nulas. En particular, la carga de un condensador permanecerá constante.

Cuando el movimiento de las cargas es función del tiempo hay que tener en cuenta efectos como la variación de la carga en los condensadores y la inducción electromagnética.

El caso general de corrientes dependientes del tiempo puede ser extremadamente complicado, ya que aparecen fenómenos como la radiación electromagnética o el acoplamiento entre diferentes partes de un circuito.

Aquí consideraremos los casos más sencillos. Supondremos corrientes variables en el tiempo pero que cambian lentamente. En este caso, pueden aplicarse generalizaciones de las fórmulas de corriente continua (en particular, la ley de Ohm y la relación entre carga y potencial de un condensador) pero admitiendo que $I = I(t)$.

2 El condensador real

En su forma general, la ley de conservación de la carga nos dice que la carga ni se crea ni se destruye. Esto quiere decir que si en un volumen cerrado la cantidad de carga contenida está disminuyendo es porque está escapando al exterior (ya que no puede desaparecer).

$$-\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \oint_S \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

Consideremos ahora el caso de un condensador real, o condensador con pérdidas, formado por dos placas metálicas altamente conductoras, entre las cuales se encuentra un medio material dieléctrico de permitividad εque tiene una pequeña conductividad σ. En este caso el condensador no funciona como un circuito abierto, sino que puede haber una corriente óhmica que lo atraviese.

Sea I la intensidad de corriente que llega a la placa positiva del condensador. Esa corriente no tiene por qué igualar a la que atraviesa el condensador, ya que puede haber variación en la carga almacenada.

Sea S una superficie cerrada que envuelve a la placa positiva. Aplicando la ley de conservación de la carga a esta superficie queda

$$-\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \int_{\mathrm{cable}} \vec{J}\cdot\mathrm{d}\vec{S} + \int_{\mathrm{medio}} \vec{J}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

La integral a través de la sección del cable es igual a la intensidad de corriente cambiada de signo, ya que hemos definido I como la corriente que entra, no la que sale

$$\int_{\mathrm{cable}} \vec{J}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = -I$$

Sustituimos y despejamos y queda

$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \int_{\mathrm{medio}} \vec{J}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

que podemos leer como que la intensidad de corriente que llega parte se emplea en variar la carga almacenada y parte se escapa por el medio dieléctrico.

Tenemos tres casos particulares:

Dieléctrico ideal

si el medio dieléctrico no tiene conductividad, la densidad de corriente en él es nula y la ecuación anterior se reduce a

$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} \qquad (\vec{J} = \vec{0})$$

Éste es el único caso en que la intensidad de corriente es igual a la derivada de la carga respecto al tiempo, cuando tenemos un condensador ideal de resistencia infinita (o conductancia nula).

Caso estacionario

Si estamos en una situación de corriente continua, todas las derivadas respecto al tiempo se anulan y queda

$$I = \int_{\mathrm{medio}} \vec{J}\cdot\mathrm{d}\vec{S} \qquad \left(\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = 0\right)$$

En este caso, toda la corriente que llega sigue circulando por el material y el dispositivo se comporta como una resistencia. Esto no quiere decir que no haya carga en las placas, sino que ésta es constante en el tiempo. Ahora bien, si la carga puede circular por el material, ¿cómo puede quedarse a la vez quieta en las placas? La respuesta es que las cargas individuales que están en las placas no son siempre las mismas. Un electrón llega a la placa negativa y las fuerzas eléctricas tiran de él y lo hacen atravesar el material, pero como las placas están conectadas a un generador, las cargas que escapan son sustituidas por otras nuevas.

Dispositivo aislado

Si desconectamos el generador se anula la intensidad de corriente que llega por el cable y la ecuación se reduce a

$$-\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \int_{\text{medio}} \vec{J}\cdot\mathrm{d}\vec{S} \qquad\qquad (I=0)$$

En este caso lo que tenemos es que sin aporte externo de carga las placas se descargan gradualmente porque se escapan por el material.

Si la carga y la corriente en un condensador real varían lentamente con el tiempo, puede suponerse que la carga es proporcional a la diferencia de potencial, como en el caso estático

$$Q = C\,\Delta V$$

mientras que la corriente que circula por el material verifica la ley de Ohm, por tratarse de un material con conductividad

$$\int_{\text{medio}} \vec{J}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \frac{\Delta V}{R}$$

En el caso particular de un condensador de placas paralelas, esta capacidad y resistencia valen

$$C = \frac{\varepsilon S}{a} \qquad\qquad R = \frac{a}{\sigma S}$$

Con estas relaciones, la intensidad de corriente que llega al condensador con pérdidas se expresa

$$I = C\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta V) + \frac{\Delta V}{R}$$

Si el condensador es ideal ($R \to \infty$) la corriente se reduce a

$$I = I_C = C\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta V) \qquad\qquad (R \to \infty)$$

y si la corriente es continua se anula la derivada respecto al tiempo

$$I = I_R = \frac{\Delta V}{R} \qquad\qquad \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta V) = 0\right)$$

En el caso general tendremos la suma de los dos términos

$$I = I_C + I_R \qquad\qquad I_C = C\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta V) \qquad I_R = \frac{\Delta V}{R}$$

En términos de un circuito equivalente, el que la corriente que llega se escriba como suma de dos contribuciones nos dice que se puede modelar como dos elementos en paralelo. Uno de ellos es un condensador ideal, de resistencia infinita, y la corriente que pasa por él se denomina corriente capacitiva. El segundo es un resistor óhmico, sin capacidad, y la corriente que lo atraviesa es la componente resistiva.

En corriente continua solo pasa corriente por la resistencia, pero en situaciones de corrientes variables en el tiempo también hay componente capacitiva (lo que quiere decir en realidad que está variando la carga almacenada).

3 Descarga de un condensador

Como ejemplo de corriente variable tenemos el caso de la descarga de un condensador con pérdidas.

Supongamos en primer lugar que el condensador está conectado a una fuente de tensión contínua V_0. En ese caso la carga almacenada en el condensador permanece constante e igual a CV_0. Simultáneamente, por el dieléctrico fluye una corriente V_0 / R. Como se comentó antes, las cargas individuales que se encuentran en las placas no son siempre las

mismas, sino que atraviesan el material y son sustituidas por nuevas cargas procedentes del generador.

Si ahora desconectamos el generador, cesa el aporte de cargas externas y las que fluyen por el material no son repuestas. Como resultado, el condensador se descarga progresivamente.

Matemáticamente lo que tenemos es la ecuación diferencial

$$0 = I = C\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta V) + \frac{\Delta V}{R} \qquad\qquad \Delta V(t=0) = V_0$$

o, equivalentemente

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta V) = -\frac{1}{RC}\Delta V \qquad\qquad \Delta V(t=0) = V_0$$

La solución de esta ecuación diferencial es una exponencial decreciente

$$\Delta V = V_0 \mathrm{e}^{-t/\tau} \qquad\qquad \tau = RC$$

La constante de tiempo $\tau = RC$ es el llamado *tiempo de carga* (o de descarga, en este caso) del condensador. Da una medida del tiempo que tarda en descargarse el condensador, aunque este realmente requeriría un tiempo infinito, pasado 2 o 3 veces τ ya se puede suponer que está descargado.

En el caso de un condensador plano lleno de un medio dieléctrico con conductividad

$$RC = \frac{a}{\sigma S}\,\frac{\varepsilon S}{a} = \frac{\varepsilon}{\sigma}$$

Este tiempo suele ser extremadamente breve salvo en dieléctricos muy aislantes. Un buen dieléctrico es el metacrilato, cuya conductividad es de $10^{-13}\mathrm{S/m}$ y su permitividad es

$$3.4\varepsilon_0 = 3\times 10^{-11}\mathrm{F/m}$$

lo que da una constante de tiempo

$$\tau = \frac{3\times 10^{-11}}{10^{-13}}\mathrm{s} = 300\,\mathrm{s} = 5\,\mathrm{min}$$

En la descarga de un condensador también se produce disipación de energía por efecto Joule, siendo la potencia

$$P = \frac{(\Delta V)^2}{R} = \frac{V_0^2}{R}\mathrm{e}^{-2t/\tau}$$

siendo la energía total disipada

$$W_d = \int_0^\infty P\,\mathrm{d}t = \frac{V_0^2}{R}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-2t/\tau}\mathrm{d}t = \frac{V_0^2}{R}\,\frac{\tau}{2}$$

Sustituimos el valor del tiempo de carga y queda

$$W_d = \frac{V_0^2}{R}\,\frac{RC}{2} = \frac{1}{2}CV_0^2$$

que es la energía almacenada inicialmente en el condensador. Interpretamos este resultado como que en el proceso de descarga del condensador la energía almacenada se disipa por efecto Joule.

4 Carga de un condensador

Un caso similar pero ligeramente diferente es el de la carga de un condensador.

Imaginemos un condensador ideal (de resistencia infinita), inicialmente descargado, una de cuyas placas se conecta a una fuente de continua de tensión V_0, estando la otra placa puesta a tierra. La conexión no se efectúa a través de un cable perfectamente conductor, sino que posee una resistencia R (esta resistencia incluye las de los cables de ambas placas y la interna de la fuente de tensión).

Este circuito puede modelar, por ejemplo, a un conductor que se conecta a una fuente de tensión.

En este caso tenemos una asociación de una resistencia y un condensador en paralelo. Si denominamos A al nodo conectado a la fuente, B al punto de conexión entre la resistencia y el condensador y D al nodo a tierra. Se cumple

$$\Delta V_R + \Delta V_C = (V_A - V_B) + (V_B - V_D) = V_0$$

Cumpliéndose que

$$\Delta V_R = IR \qquad\qquad \Delta V_C = \frac{Q}{C}$$

y, por tratarse de un condensador ideal

$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$$

lo que nos lleva a la ecuación diferencial

$$R\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \frac{Q}{C} = V_0 \qquad\qquad Q(t=0) = 0$$

Esta es una ecuación diferencial de coeficientes constantes, cuya solución es estándar. Buscamos primero una solución estacionaria. Pasado mucho tiempo el condensador está cargado por lo queda

$$Q_\infty = CV_0$$

Si ahora queremos la solución para todo instante, la escribimos como suma de ésta más una corrección

$$Q(t) = CV_0 + Q'$$

Sustituimos en la ecuación diferencial y queda

$$R\frac{\mathrm{d}Q'}{\mathrm{d}t} + \frac{Q'}{C} = 0 \qquad\qquad Q'(t=0) = -CV_0$$

cuya solución es, como antes, una exponencial decreciente

$$Q'(t) = -CV_0\mathrm{e}^{-t/\tau} \qquad\qquad \tau = RC$$

La solución completa es entonces

$$Q(t) = CV_0\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)$$

Esta solución tiende asintóticamente al estado estacionario. El periodo inicial, en el que el voltaje aun no es el estacionario, se denomina transitorio. Su duración puede estimarse como dos o tres veces el tiempo de carga RC.

La intensidad de corriente que circula por el cable decae exponencialmente

$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \frac{CV_0}{\tau}\mathrm{e}^{-t/\tau} = \frac{V_0}{R}\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

Desde el punto de vista energético, tenemos que la energía almacenada también va aumentando hasta su valor estacionario

$$U_\mathrm{e} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV_0^2\left(1-\mathrm{e}^{-t/\tau}\right)^2$$

En t = 0 esta energía es nula. Pasado mucho tiempo tras la conexión tiende a $CV_0^2/2$.

Simultáneamente a este almacenamiento se destá disipando energía en la resistencia por efecto Joule. La potencia instantánea es

$$P = I^2R = \frac{V_0^2}{R}\mathrm{e}^{-2t/\tau}$$

y la energía total disipada

$$W_d = \int_0^\infty P\,\mathrm{d}\tau = \frac{V_0^2}{R}\,\frac{\tau}{2} = \frac{1}{2}CV_0^2$$

El valor de esta energía disipada coincide con el de la energía almacenada, pero en este caso no se trata de que la resistencia disipe la energía almacenada en el condensador, ya que ahora éste se está cargando, no descargando.

La energía disipada procede de la aportada por el generador. La potencia desarrollada por éste es

$$P_g = IV_0 = \frac{V_0^2}{R}\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

y el trabajo total realizado por el generador vale

$$W_g = \int_0^\infty P_g\,\mathrm{d}t = \frac{V_0^2}{R}\tau = CV_0^2$$

Este trabajo es el doble de la energía disipada y es igual a la suma del trabajo disipado en la resistencia en forma de calor y de la energía almacenada en el condensador

$$W_g = W_d + \Delta U_e$$

5 Corriente alterna

Una situación de especial importancia en el campo de la ingeniería es el de la *corriente alterna*, en el cual la corriente que fluye varía de forma sinusoidal con el tiempo

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

donde, como en el movimiento armónico simple,

- I_0 es la amplitud.
- ω es la frecuencia angular (medida en rad/s), que se relaciona con la frecuencia natural, f (medida en Hz) y con el periodo T, por

$$\omega = 2\pi f \qquad\qquad T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$$

- φ es la constante de fase.

El que sea una función oscilante permite también el uso de fasores o amplitudes complejas

$$I(t) = \mathrm{Re}\left(\hat{I}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right)$$

siendo

$$\hat{I} = I_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} = (I_0\cos(\varphi)) + \mathrm{j}(I_0\,\mathrm{sen}(\varphi))$$

5.1 Impedancia

En corriente alterna (c.a. o AC) el voltaje entre los extremos de un dispositivo también varía sinusoidalmente

$$\Delta V(t) = V_0 \cos(\omega t + \beta)$$

y puede establecerse una relación entre el fasor de la intensidad y el del voltaje.

Resistencia

En una resistencia se cumple la ley de Ohm

$$\Delta V(t) = I(t)R$$

y por tanto las amplitudes complejas son proporcionales

$$\hat{V} = \hat{I}R$$

Condensador ideal

Si la resistencia del condensador es infinita tenemos la relación

$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}(\Delta V)}{\mathrm{d}t}$$

En términos de amplitudes complejas, la derivación equivale a la multiplicación por jω, lo que da

$$\hat{I} = (\mathrm{j}\omega C)\hat{v} \qquad \Rightarrow \qquad \hat{V} = Z_C\hat{I} \qquad\qquad Z_C = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}$$

Vemos que en términos de fasores se cumple también una “ley de Ohm” pero con una “resistencia” compleja. A esta constante de proporcionalidad se la denomina *impedancia*.

$$Z_R = R \qquad\qquad Z_C = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C}$$

Condensador real

En un condensador con pérdidas la corriente es una suma de la componente resistiva y de la capacitiva

$$I = C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta V) + \frac{\Delta V}{R}$$

lo que da, en términos fasoriales

$$\hat{I} = (R + \mathrm{j}\omega C)\hat{V} \qquad \rightarrow \qquad Z = \frac{1}{R + \mathrm{j}\omega C}$$

La impedancia de la asociación cumple las reglas de las asociaciones en paralelo

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_R} + \frac{1}{Z_C}$$

5.2 Potencia instantánea y promedio

En una resistencia por la cual circula una corriente alterna se disipa una potencia instantánea

$$P(t) = I(t)^2 R = I_0^2 R \cos^2(\omega t + \varphi) = \frac{I_0^2 R (1 + \cos(2\omega t + 2\varphi)}{2}$$

Ésta es también una función oscilante, pero siempre positiva, que varía entre 0 e $I_0^2 R$. Su valor promedio en un periodo (más interesante si el periodo es corto) será

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} I_0^2 R$$

La potencia desarrollada por un generador que produce un voltaje alterno

$$\mathcal{E} = V_0 \cos(\omega t)$$

cuando por él pasa una corriente alterna desfasada

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

será

$$P_g = \mathcal{E} I = V_0 I_0 \cos(\omega t) \cos(\omega t + \varphi)$$

El valor medio sobre un periodo de esta potencia vale

$$\langle P_g \rangle = \frac{V_0 I_0}{2}\cos(\varphi)$$

Este factor $\cos(\varphi)$ es crucial a la hora de calcular si el generador está entregando energía que se consume o que se almacena.

Potencia eléctrica

1 Flujo de trabajo que entra en un sistema

La transmisión de una corriente eléctrica implica un consumo de energía.

Imaginemos un sistema (no necesariamente óhmico) con dos extremos A y B, situados a potenciales V_A y V_B.

Podemos imaginar que hay una fuente de tensión que sitúa el extremo A a la tensión V_A. El trabajo realizado por esta fuente en un tiempo dt es igual a la cantidad de carga que pone a ese potencial multiplicada por la tensión a la que la pone. Ese trabajo entra en el sistema (el cable)

$$\delta W_{\mathrm{in}} = \mathrm{d}Q_A\, V_A$$

pero la carga que atraviesa el generador es proporcional a la intensidad de corriente

$$\mathrm{d}Q_A = I_A\,\mathrm{d}t$$

siendo I_A la corriente que entra en el sistema por el extremo A. Por tanto

$$\delta W_{\mathrm{in}} = I_A\, V_A\,\mathrm{d}t$$

Dividiendo por el diferencial de tiempo queda un flujo de trabajo (potencia eléctrica) debido a este generador

$$\dot{W}_{\mathrm{in}} = I_A V_A$$

Para el otro extremo se aplica el mismo razonamiento por lo que el flujo de trabajo total

$$\dot{W}_{\mathrm{in}} = I_A V_A + I_B V_B$$

Más en general, si tenemos un sistema con N terminales por las cuales entra corriente, el flujo de trabajo, es decir, la potencia eléctrica, que entra en el sistema es

$$P_{\mathrm{e}} = \dot{W}_{\mathrm{in}} = \sum_i I_i V_i$$

donde las I_i son las corrientes que entran el sistema por las diferentes terminales. Evidentemente, de acuerdo con la ley de conservación de la carga, algunas de estas corrientes serán negativas.

En particular, si tenemos un sistema con una única entrada y una salida, de forma que la corriente que entra por un cable sale por el otro, se cumple

$$I_A = I \qquad\qquad I_B = -I$$

y por tanto

$$\dot{W}_{\mathrm{in}} = I_A V_A + I_B V_B = I(V_A - I_B) = I\,\Delta V$$

Es decir la potencia eléctrica en un sistema con una entrada y una salida es igual al producto de la intensidad que entra por la d.d.p. entre la entrada y la salida.

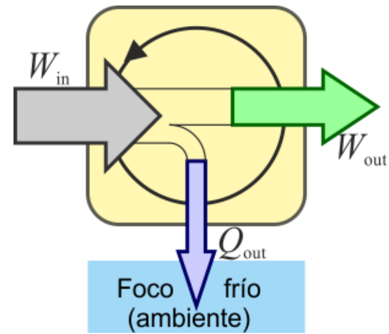
2 Motores eléctricos y generadores eléctricos

La potencia eléctrica o flujo de trabajo eléctrico que penetra en un sistema puede emplearse para distintos objetivos o con diferentes resultados.

Uno de ellos es la realización de trabajo mecánico. Este es el principio de los motores eléctricos. En un motor se consume una potencia eléctrica que en parte se emplea en realizar trabajo y en parte se pierde en forma de calor (por rozamiento y por efecto Joule).







El sistema puede funcionar a la inversa, es decir, puede emplearse trabajo mecánico para producir trabajo eléctrico. Esto es lo que ocurre en los aerogeneradores y en las turbinas de las centrales eléctricas



En el caso de un generador eléctrico, el resultado es una d.d.p. que tiene signo contrario a la corriente, de forma que el flujo de trabajo eléctrico es negativo, es decir, está saliendo del sistema, no entrando.

3 Efecto Joule

En el caso particular de un cable (o, en general, de un resistor caracterizado por una resistencia *R*), si el extremo A está a mayor voltaje que B, la corriente va de A a B. El flujo de trabajo eléctrico (o potencia eléctrica) que entra en la resistencia es

$$P_\mathrm{e} = \dot{W}_\mathrm{in} = I\,\Delta V = I(V_A - V_B)$$

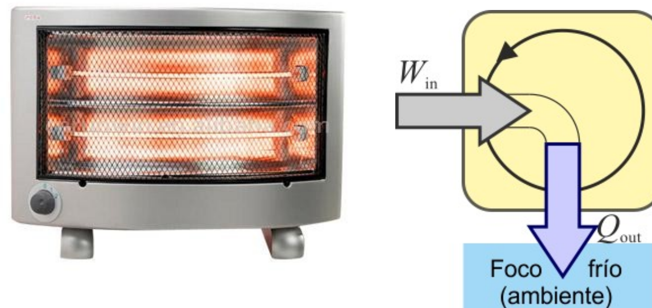
Por la ley de Ohm para una resistencia, podemos escribir esta potencia de varias formas alternativas

$$\Delta V = IR \qquad \Rightarrow \qquad P_\mathrm{e} = \dot{W}_\mathrm{in} = I\,\Delta V = I^2R = \frac{(\Delta V)^2}{R}$$

esta es la llamada *ley de Joule* (o *efecto Joule*). En una resistencia eléctrica se consume trabajo eléctrico. De acuerdo con el primer principio de la termodinámica tendremos que

$$\dot{W}_{\mathrm{in}} = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} + \dot{Q}_{\mathrm{out}}$$

es decir, la potencia eléctrica que metemos, en parte se emplea en aumentar la energía almacenada (que puede ser en forma de energía interna, lo que vemos como un aumento de temperatura del sistema, pero también en otros tipos de energía) y parte se escapa al exterior en forma de calor. Es decir, un cable por el cual circula una corriente aumenta su temperatura y radia calor al exterior. Esta disipación a veces es deseada, como en el caso de una estufa, pero normalmente es indeseable y hay que procurar reducirla (puede demostrarse que debido a la corriente existe una producción de entropía que hay que reducir para mejorar la eficiencia de un sistema).



La cantidad total de energía eléctrica consumida es la integral de la potencia

$$W_{\mathrm{in}} = \int_0^t P_{\mathrm{in}}\,\mathrm{d}t = \int_0^t I^2 R\,\mathrm{d}t$$

En el caso de una corriente continua (I = cte) el resultado de la integral es una simple multiplicación. Para una corriente variable (como la corriente alterna, por ejemplo), habrá que hacer el cálculo correspondiente.

4 Almacenamiento de energía eléctrica

No siempre la potencia eléctrica que entra se escapa en forma de trabajo o calor. También puede almacenarse en el interior del sistema en forma de energía electrostática.

4.1 Condensador ideal

Imaginemos que nuestro sistema es un condensador ideal (sin conductancia) en el cual la corriente que llega se emplea en variar la carga almacenada en el condensador

$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$$

mientras que la diferencia de potencial entre las placas es proporcional a la carga almacenada

$$Q = C(V_A - V_B)$$

Esto da, para la potencia

$$\dot{W}_{\mathrm{in}} = (V_A - V_B)I = \Delta V\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(C\Delta V) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}C(\Delta V)^2\right)$$

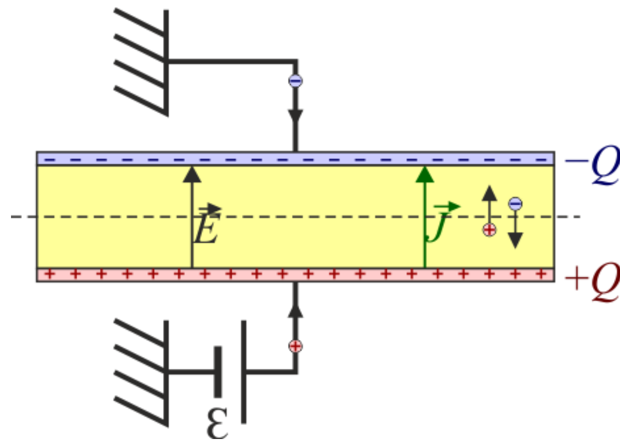
es decir, el trabajo que entra en la unidad de tiempo es igual a lo que aumenta la energía almacenada en el condensador.

También funciona a la inversa. Si el condensador se está descargado resulta una corriente en sentido contrario y la disminución de la energía almacenada es igual al trabajo que sale del sistema por segundo.

4.2 Condensador real

Si tenemos un condensador con pérdidas, la corriente que llega a él se compone de una parte capacitiva y de una parte resistiva

$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \int \vec{J}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$



Ambos términos se pueden poner en función de la diferencia de potencial entre placas

$$Q = C\,\Delta V \qquad\qquad \int \vec{J}\cdot\mathrm{d}S = \frac{\Delta V}{R}$$

lo que da, para la corriente que llega por el cable

$$I = C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta V) + \frac{\Delta V}{R}$$

y para el flujo de trabajo eléctrico

$$\dot{W}_{\mathrm{in}} = I\,\Delta V = \Delta V\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(C\,\Delta V) + \frac{(\Delta V)^2}{R}$$

que se puede escribir en la forma

$$\dot{W}_{\mathrm{in}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}C(\Delta V)^2\right) + \frac{(\Delta V)^2}{R}$$

es decir, que el trabajo que entra parte se va en aumentar la energía almacenada y parte se va en potencia disipada. Esta fórmula contine tres casos particulares de interés.

- Si la corriente es continua, la energía almacenada es constante, el primer sumando se anula y todo el trabajo que entra se disipa por efecto Joule.
- Si el condensador es ideal, no hay disipación de energía por efecto Joule y todo el trabajo que entra se almacena en el condensador

- Si el sistema está aislado, no hay flujo de trabajo desde el exterior y la energía almacenada en el condensador se disipa por efecto Joule.

$$\dot{W}_{\text{in}} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}C(\Delta V)^2\right) = \frac{(\Delta V)^2}{R}$$